ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μέρος Α΄

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Φυσική Α΄ Λυκείου, Μέρος Α΄

Συγγραφή:

Γεώργιος Αρχοντής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Ανδρέας Παπαστυλιανού, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

Φώτιος Πτωχός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Νικόλαος Τούμπας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Επιμέλεια έκδοσης:

Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός

Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός

Γλωσσική επιμέλεια:

Μαριάννα Χριστόφια-Παλάτου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Ηλεκτρονική σελίδωση:

Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός

Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός

Σχεδιασμός εξωφύλλου:

Θεόδωρος Κακουλλής, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης:

Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2015

Εκτύπωση: Lithoweb ltd

ISBN: 978-9963-0-4787-1

50%

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διασφάλιση της ποιότητας ζωής στον αιώνα που διανύουμε, βασίζεται ολοένα και περισσότερο στην επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο. Η απόκτηση εκπαίδευσης και δεξιοτήτων στην επιστήμη είναι απαραίτητη για την επίτευξη βιώσιμης ανάπτυξης και εδραίωσης της πραγματικής δημοκρατίας.

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω την έκδοση του βιβλίου «Φυσική Α΄ Λυκείου». Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με τη σκέψη ότι εσείς, οι σημερινοί μαθητές και οι αυριανοί πολίτες, θα πρέπει να δομήσετε ένα συνεκτικό σώμα γνώσεων, να αναπτύξετε τις αναγκαίες δεξιότητες και ικανότητες για συμμετοχή σε μια κοινωνία ενεργών και κριτικά σκεπτόμενων ανθρώπων και να διαμορφώσετε θετικές στάσεις και συμπεριφορές έναντι της επιστήμης. Γι’ αυτό τον λόγο σε αυτό το βιβλίο τα θέματα της Φυσικής συνδέονται με την καθημερινή ζωή, τη φύση και την εξέλιξη της επιστήμης.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους εκπαιδευτικούς της ομάδας, Ιωάννη Καρμιώτη και Δημήτριο Φιλίππου, στον Επιθεωρητή της Φυσικής Ανδρέα Παπαστυλιανού, καθώς και στους πανεπιστημιακούς Γεώργιο Αρχοντή, Νικόλαο Τούμπα και Φώτιο Πτωχό που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή του βιβλίου.

Τέλος, ευχαριστώ την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων που είχε την ευθύνη για την έκδοση του βιβλίου αυτού.

Δρ Κυπριανός Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Στο **Κεφάλαιο 1** μαθαίνουμε να:

- εξηγούμε τη σημασία των μονάδων μέτρησης φυσικών μεγεθών
- αναφέρουμε τις μονάδες μέτρησης των θεμελιωδών μεγεθών στο σύστημα SI και τα πολλαπλάσιά τους
- εκτελούμε μετατροπές μονάδων
- ταξινομούμε τα μεγέθη σε μονόμετρα και διανυσματικά
- περιγράφουμε τα σφάλματα μετρήσεων
- προσδιορίζουμε τα σημαντικά ψηφία των μετρούμενων τιμών

Μετρήσεις

Για να περιγράψουμε τη φύση μετρούμε μεγέθη όπως το μήκος, ο χρόνος, η μάζα, η πυκνότητα, η πίεση, η θερμοκρασία και η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος. Όταν μετρούμε ένα μέγεθος, το συγκρίνουμε με ένα χαρακτηριστικό **πρότυπο** που το ονομάζουμε *μονάδα μέτρησης* του μεγέθους. Έστω ότι σε μια μέτρηση μήκους βρίσκουμε ότι η πλευρά ενός τραπεζιού είναι 2 φορές μεγαλύτερη από ένα χαρακτηριστικό (πρότυπο) μήκος, το μέτρο (m). Δηλώνουμε αυτό το αποτέλεσμα λέγοντας ότι το μήκος της πλευράς του τραπεζιού είναι 2 m.

Πίνακας 1-1: Χαρακτηριστικά μήκη (σε m), κατά προσέγγιση

Ακτίνα πρωτονίου	10^{-15}
Διάμετρος ατόμου υδρογόνου	10^{-10}
Τυπικό κύτταρο	10^{-6}
Μήκος μύγας	10^{-2}
Ύψος Εβερεστ	$9\cdot 10^{3}$
Ακτίνα της Γης	$6,4\cdot 10^{6}$
Απόσταση Γης – Σελήνης	$3,8\cdot 10^{8}$
Ακτίνα του ηλιακού συστήματος	$4,5\cdot 10^{12}$
Ακτίνα του Γαλαξία μας	10^{21}
Απόσταση των πιο απομακρυσμένων Γαλαξιών	10^{26}

Σύστημα Μονάδων και Μονάδες Μέτρησης

Τα *θεμελιώδη* μεγέθη της Φυσικής είναι το μήκος, ο χρόνος και η μάζα. Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI), μονάδα μήκους είναι το μέτρο (m), χρόνου το δευτερόλεπτο (s), και μάζας το χιλιόγραμμο (kg). Στους Πίνακες 1-1, 1-2 και 1-3 αναφέρονται χαρακτηριστικά μήκη, χρόνοι και μάζες.

Τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη ονομάζονται *παράγωγα* διότι ορίζονται από σχέσεις που εμπλέκουν τα θεμελιώδη μεγέθη. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν και οι αντίστοιχες μονάδες των παραγώγων μεγεθών. Για παράδειγμα, μονάδα επιφάνειας είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2), και μονάδα όγκου το κυβικό μέτρο (m^3). Ως πυκνότητα ενός σώματος ορίζεται το πηλίκο της μάζας προς τον όγκο του, με μονάδα το kg/m^3. Η ταχύτητα σχετίζεται με το πηλίκο του μήκους προς το χρόνο και έχει μονάδα το m/s.

Πίνακας 1-2: Χαρακτηριστικοί χρόνοι (σε s), κατά προσέγγιση

Χρόνος ζωής του μιονίου	10^{-6}
Χρονικό διάστημα μεταξύ σφυγμών της καρδιάς	10^{0}
Διάρκεια ημέρας	$8,6\cdot 10^{4}$
Διάρκεια έτους	$3,2\cdot 10^{7}$
Πρώτοι ανθρωπίδες	10^{14}
Ηλικία Γης	10^{17}
Ηλικία Σύμπαντος	$5\cdot 10^{17}$

Οι μονάδες κάποιων παραγώγων μεγεθών αποδίδονται με ιδιαίτερο όνομα. Η μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το $\mathrm{kg\, m/s^2}$ στο σύστημα SI, και ονομάζεται Newton (N).

Πίνακας 1-3: Χαρακτηριστικές μάζες (σε kg), κατά προσέγγιση

Ηλεκτρόνιο	10^{-30}
Πρωτόνιο	10^{-27}
Ατομο Ουρανίου	$4\cdot 10^{-25}$
Βακτήριο Ecoli	10^{-15}
Κόκκος γύρης	10^{-10}
Κουνούπι	10^{-5}
Άνθρωπος	$7\cdot 10^{1}$
Μπλέ Φάλαινα	10^{5}
Εβερεστ	10^{15}
Γη	$6\cdot 10^{24}$
Ηλιος	10^{30}
Ο Γαλαξίας μας	10^{41}

Η χρήση μονάδων είναι απαραίτητη στη Φυσική: Η φράση «*η μάζα της πέτρας είναι 25*» δεν έχει νόημα, αν δεν προσδιορίσουμε σε ποια μονάδα αναφέρεται η αριθμητική τιμή.

Πολλαπλάσια Μονάδων Μέτρησης

Περιγράφουμε τα πολλαπλάσια των μονάδων με προθέματα που δηλώνουν πόσο μεγαλύτερη ή μικρότερη είναι η εξεταζόμενη ποσότητα από τη μονάδα που ακολουθεί το πρόθεμα. Τα πιο συνηθισμένα προθέματα αναφέρονται στον Πίνακα 1-4. Για παράδειγμα, το πρόθεμα «kilo» («k», «χιλιο») δηλώνει το 10^3, το «milli» («m», «χιλιοστο») το 10^{-3}, και το «micro» («μ», «μικρο») το 10^{-6}.

Πίνακας 1-4: Προθέματα μονάδων μέτρησης.

Πρόθεμα	Δύναμη
peta (P)	10^{15}
terra (T)	10^{12}
giga (G)	10^{9}
mega (M)	10^{6}
kilo (k)	10^{3}
deka (da)	10^{1}
deci (d)	10^{-1}
centi (c)	10^{-2}
milli (m)	10^{-3}
micro (μ)	10^{-6}
nano (n)	10^{-9}
pico (p)	10^{-12}
femto (f)	10^{-15}

Κάποια πολλαπλάσια μονάδων αποδίδονται με ιδιαίτερο όνομα και όχι με χρήση προθέματος. Για παράδειγμα, ένα λίτρο (l) ισούται με $10^{-3}\ \mathrm{m^3}$, ένας τόνος (tn) με 1000 kg, ένα λεπτό (min) με 60 s και μία ώρα (h) ισούται με 3600 s.

Μετατροπές Μονάδων Μέτρησης

Χρησιμοποιώντας τα προθέματα του Πίνακα 1-4, μπορούμε να γράψουμε ισότητες μεταξύ μιας μονάδας και των πολλαπλασίων της. Έτσι, $1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $1\,\mathrm{ps} = 10^{-12}\,\mathrm{s}$, $1\,\mathrm{kg} = 10^{3}\,\mathrm{g}$. Κάθε τέτοια ισότητα ορίζει ένα λόγο ίσο με 1. Για παράδειγμα,

$$1=\frac{10^{-2}\ \mathrm{m}}{1\,\mathrm{cm}},\quad 1=\frac{10^{3}\ \mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}},\quad 1=\frac{3600\ \mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}},\quad 1=\frac{10^{3}\ \mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}}$$

Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται να πραγματοποιήσουμε μετατροπές μεταξύ πολλαπλασίων μιας μονάδας μέτρησης. Για να μετατρέψουμε ένα πολλαπλάσιο μονάδας σε ένα άλλο, το πολλαπλασιάζουμε με τον κατάλληλο (ίσο με 1) λόγο, γραμμένο έτσι ώστε να απαλείφεται η αρχική μονάδα και να εμφανίζεται η νέα μονάδα.

Για παράδειγμα, μετατρέπουμε τη μονάδα επιφάνειας (cm^2) στην αντίστοιχη μονάδα επιφάνειας στο SI, (m^2), ως εξής:

$$1\ (\mathrm{cm})^2 = 1\ (\mathrm{cm})^2 \left[\frac{10^{-2}\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{cm}}\right]^2 = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

Παρομοίως, μετατρέπουμε και τις μονάδες παραγώγων μεγεθών. Η ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι $3683\ \mathrm{km/h}$. Μπορούμε να την μετατρέψουμε σε $\mathrm{m/s}$, ως εξής:

$$3683\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3683\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\ \frac{10^3\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}}\ \frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}} =$$
$$\frac{3683\times 10^3}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1023\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Όπως δείχνουν τα παραπάνω παραδείγματα μετατροπών, *οι μονάδες πολλαπλασιάζονται, διαιρούνται και απαλείφονται μεταξύ τους όπως οι αριθμοί.*

Όταν εκτελούμε πράξεις μεταξύ μεγεθών, πρέπει να μετατρέπουμε όλες τις ανόμοιες μονάδες του ίδιου φυσικού μεγέθους στην ίδια μονάδα (π.χ., όλα τα μήκη σε m, όλες τις μάζες σε kg, κ.λπ.). Το μέγεθος που εμφανίζεται στο τελικό αποτέλεσμα είναι λανθασμένο, αν δεν συνοδεύεται από τις σωστές μονάδες.

Η *χρήση μονάδων βοηθά στον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων μας.*

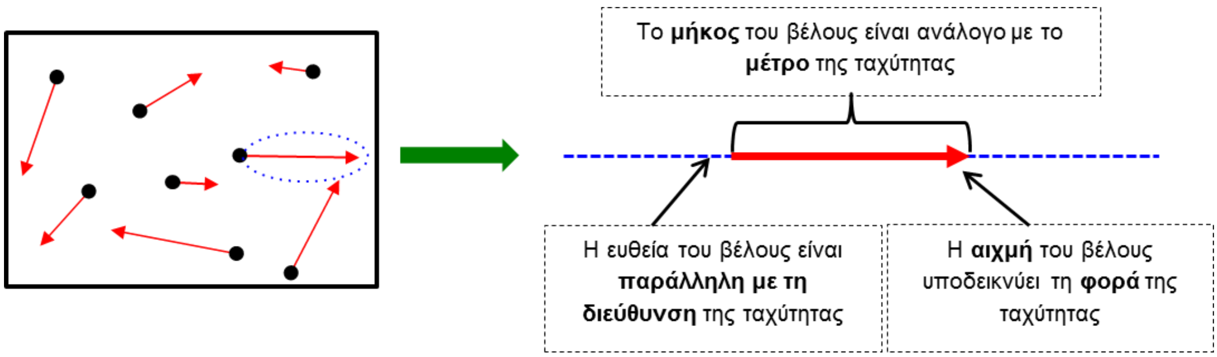
Μονόμετρα και Διανυσματικά μεγέθη

Μερικά φυσικά μεγέθη περιγράφονται πλήρως αν είναι γνωστό το **μέτρο** τους (η αριθμητική τιμή και η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης).

Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται **μονόμετρα**. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών είναι το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, ο χρόνος, η μάζα, η πυκνότητα και η θερμοκρασία.

Πολλά φυσικά μεγέθη έχουν όχι μόνο μέτρο αλλά και **κατεύθυνση** (διεύθυνση και φορά). Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται **διανυσματικά**. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών είναι η θέση, η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη.

Κάθε διανυσματικό μέγεθος μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με ένα βέλος. Το μήκος του βέλους είναι ανάλογο με το μέτρο του μεγέθους, η ευθεία του βέλους είναι παράλληλη με τη διεύθυνση του μεγέθους και η αιχμή του βέλους υποδηλώνει τη φορά του. Το παράδειγμα της Εικόνας 1-1 απεικονίζει τα μόρια ενός αερίου (μαύρες κουκκίδες) στο εσωτερικό ενός δοχείου. Τα κόκκινα βέλη αναπαριστούν τις ταχύτητες των μορίων.



Εικόνα 1-1: Τα μόρια ενός αερίου (μαύρες κουκκίδες) κινούνται με διάφορες ταχύτητες που αναπαρίστανται γραφικά από τα κόκκινα βέλη. Κάθε ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, δηλαδή έχει μέτρο και κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του βέλους που αναπαριστά μια ταχύτητα σχετίζονται με το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

Μετρήσεις και Αβεβαιότητα

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου, για να μετρήσουμε την τιμή ενός μεγέθους, το συγκρίνουμε με ένα χαρακτηριστικό πρότυπο, τη μονάδα μέτρησης. Στην καθημερινή μας ζωή πραγματοποιούμε συνεχώς μετρήσεις. Για παράδειγμα, μετρούμε το μήκος ενός τραπεζιού με τη βοήθεια ενός χάρακα, τη χρονική διάρκεια ενός φαινομένου με ένα ρολόι, τη θερμοκρασία του δωματίου με ένα θερμόμετρο.

Για την πραγματοποίηση και την εκτίμηση μιας μέτρησης είναι απαραίτητο να καθορίσουμε *το αντικείμενο της μέτρησης* (το μέγεθος που θα μετρήσουμε), *το χαρακτηριστικό πρότυπο* (τη μονάδα μέτρησης), *τη μέθοδο* μέτρησης (τον τρόπο και τα βήματα της μέτρησης). Επίσης, πρέπει να εκτιμήσουμε την *αβεβαιότητα της μέτρησης*, δηλαδή πρέπει να εκφράσουμε πόσο καλή είναι η εκτίμηση της τιμής του μεγέθους, που προκύπτει από τη μέτρηση.

Έστω ότι μετρούμε με ένα χρονόμετρο χεριού τη χρονική διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου πάνω σε ένα κεκλιμένο διάδρομο. Το *αντικείμενο* της μέτρησης είναι η χρονική διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου. Η μονάδα *μέτρησης* επιλέγεται με βάση την τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Για παράδειγμα, εάν η κίνηση του αυτοκινήτου διαρκεί μερικά δευτερόλεπτα, δεν είναι πρακτικό να επιλέξουμε σαν μονάδα μέτρησης το έτος, την ώρα, το ps ή το ns. Μια κατάλληλη μονάδα θα ήταν το δευτερόλεπτο ή κάποιο κοντινό υποπολλαπλάσιό του (το δέκατο ή το εκατοστό του δευτερολέπτου).

Ερωτήσεις

1. Να συζητήσετε ποια μονάδα μέτρησης μήκους θα επιλέγατε για να μετρήσετε: (α) τη διάμετρο ενός κυττάρου, (β) το μήκος μιας μύγας, (γ) το ύψος ενός ανθρώπου, (δ) την απόσταση δύο σημείων σε μια πόλη, (ε) την απόσταση της Λευκωσίας από διάφορες Ευρωπαϊκές πρωτεύουσες, (ζ) το ύψος του Έβερεστ, (η) την απόσταση Γής – Σελήνης. Συμβουλευτείτε, όπου χρειάζεται, τον Πίνακα 1-1.
2. Στην αστρονομία χρησιμοποιείται συχνά ως μονάδα μέτρησης αποστάσεων μέσα στο ηλιακό σύστημα η «αστρονομική μονάδα» (astronomical unit AU), η οποία ισούται περίπου με την μέση απόσταση Γης – Ήλιου (150 000 000 km). Για παράδειγμα, η απόσταση Δία – Ήλιου είναι περίπου 5 AU, και η απόσταση Ποσειδώνα – Ήλιου είναι περίπου 30 AU. Είναι πρακτική αυτή η μονάδα για μετρήσεις αποστάσεων πάνω στη Γή ή για αποστάσεις μεταξύ Γαλαξιών;

Η επιλογή της μονάδας μέτρησης καθορίζει και τις προδιαγραφές του οργάνου της μέτρησης. Για να μετρήσουμε τον χρόνο κίνησης του αυτοκινήτου σε δευτερόλεπτα, χρειάζεται να επιλέξουμε χρονόμετρο με ένδειξη δευτερολέπτου (ή υποπολλαπλασίου του).

Η μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου καθορίζει την ελάχιστη μονάδα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα για μετρήσεις με το συγκεκριμένο όργανο.

Ερώτηση

Με βάση τις μονάδες μέτρησης μήκους που επιλέξατε στην Ερώτηση 1, να συζητήσετε ποιά ένδειξη θα χρειαζόταν να έχει το όργανο μέτρησης που θα χρησιμοποιούσατε για να μετρήσετε αξιόπιστα (α) τη διάμετρο ενός κυττάρου, (β) το μήκος μιας μύγας, (γ) το ύψος ενός ανθρώπου, (δ) το ύψος του Έβερεστ, (ε) την απόσταση Γής – Σελήνης.

Αν η πραγματική τιμή για την επίδοση του αυτοκινήτου είναι $3{,}4\ \mathrm{s}$, το αυτοκίνητο θα φθάσει στο τελικό σημείο *ανάμεσα* στις ενδείξεις του χρονομέτρου «$3\ \mathrm{s}$» και «$4\ \mathrm{s}$». Αν η ελάχιστη ένδειξη του χρονομέτρου είναι το δευτερόλεπτο, η χρονική διάρκεια *του τμήματος της κίνησης ανάμεσα στο* $3^{ο}$ *και* $4^{ο}$ *δευτερόλεπτο* δεν μπορεί να μετρηθεί από το συγκεκριμένο χρονόμετρο και χρειάζεται *να εκτιμηθεί*. Έστω ότι εκτιμούμε ότι η κίνηση του αυτοκινήτου μεταξύ των $3\ \mathrm{s}$ και $4\ \mathrm{s}$ διαρκεί $0{,}2\ \mathrm{s}$, και συνεπώς η συνολική διάρκεια της κίνησης είναι $3{,}2\ \mathrm{s}$. Η εκτίμηση αυτή έχει *αβεβαιότητα*, επειδή το τελευταίο ψηφίο της τιμής (2) δεν προέκυψε από τη μέτρηση αλλά εκτιμήθηκε.

Επιπρόσθετα, το αποτέλεσμα μιας μέτρησης εξαρτάται γενικά από τον τρόπο με τον οποίο έγινε η μέτρηση. Έστω ότι διαδοχικά πειράματα μετρούν τη χρονική διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου μεταξύ δύο συγκεκριμένων σημείων του διαδρόμου, δεδομένου ότι αφήνεται από το σημείο εκκίνησης με μηδενική ταχύτητα. Το ακριβές αρχικό ή τελικό σημείο της κίνησης ενδέχεται να διαφέρει από πείραμα σε πείραμα. Επιπλέον, σε κάποια πειράματα ενδέχεται να προσδίδεται εσφαλμένα στο αυτοκίνητο μικρή αρχική ταχύτητα. Τέτοια παραδείγματα δείχνουν ότι γενικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων ενός μεγέθους θα διαφέρουν σε επαναλαμβανόμενα πειράματα εξ΄αιτίας αλλαγών στον τρόπο εκτέλεσης των πειραμάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι *τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι συνήθως συνδεδεμένα με κάποια αβεβαιότητα*, η οποία εξαρτάται από το όργανο της μέτρησης, τη μέθοδο της μέτρησης, και άλλους παράγοντες. Εξ' αιτίας των παραγόντων αυτών, η πραγματική τιμή ενός μεγέθους δεν μπορεί να μετρηθεί ακριβώς.

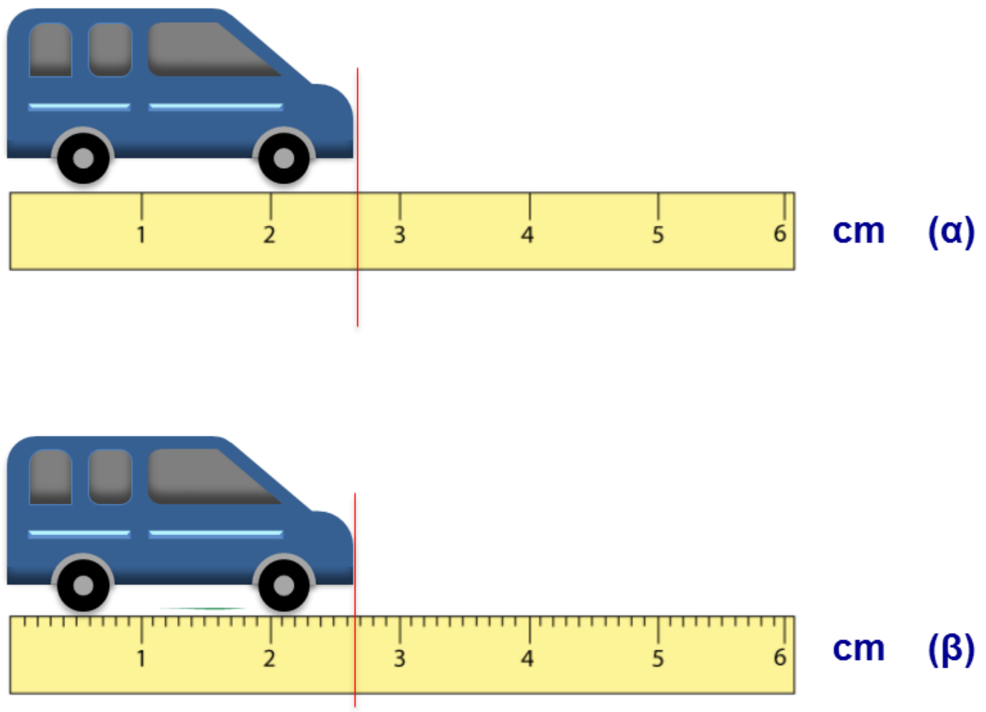
Σημαντικά Ψηφία

Κάποιοι από τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται σε υπολογισμούς της Φυσικής δεν έχουν αβεβαιότητα. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι ένα λεπτό της ώρας περιέχει ακριβώς 60 s, και μια δωδεκάδα αυγών περιέχει ακριβώς 12 αυγά. Οι αριθμοί «60» και «12» συνδέονται με τον ορισμό του λεπτού της ώρας και της δωδεκάδας, και είναι γνωστοί χωρίς αβεβαιότητα.

Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται σε παραδείγματα (π.χ. σε αριθμητικές αντικαταστάσεις τύπων) θεωρούνται επίσης γνωστοί χωρίς αβεβαιότητα. Στην εφαρμογή του τύπου για τον ορισμό της ταχύτητας, μπορεί να αναφέρεται ότι «ένα σώμα διανύει απόσταση $s = 8\ \text{m}$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5\ \text{s}$». Συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του σώματος ισούται με $\upsilon = s/\Delta t = 1{,}6\ \text{m/s}$. Οι αριθμοί που εκφράζουν την απόσταση και το χρονικό διάστημα, και το αποτέλεσμα που προκύπτει για την ταχύτητα, δεν έχουν αβεβαιότητα.

Σε αντίθεση με τις πιο πάνω περιπτώσεις, τιμές που προκύπτουν από *μετρήσεις* φυσικών μεγεθών έχουν αβεβαιότητα, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Ένα τυπικό ταχύμετρο λεωφορείου μετρά την ταχύτητα σε km/h, με μικρότερη υποδιαίρεση «5 km/h». Αν η ένδειξη του ταχυμέτρου σε κάποια στιγμή βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές «65 km/h» «και 70 km/h», συμπεραίνουμε απλώς ότι η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από 65 km/h και μικρότερη από 70 km/h. Η πραγματική αριθμητική τιμή της ταχύτητας ενδέχεται να έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ακόμα και αν βελτιώσουμε τον τρόπο μέτρησης, δεν είναι δυνατό να προσδιορίσουμε την ταχύτητα με την ίδια ακρίβεια που γνωρίζουμε τον αριθμό των λεπτών σε μια ώρα.

Έστω ότι μετρούμε το μήκος ενός πολύ μικρού αυτοκινήτου-μοντέλου με δύο διαφορετικούς χάρακες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1-2. Ο χάρακας (α) έχει υποδιαιρέσεις σε cm. Η αριστερή άκρη του μοντέλου είναι ευθυγραμμισμένη με την αριστερή άκρη του χάρακα (0 cm), και η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm και 3 cm (Εικόνα 1-2).



Εικόνα 1-2 (όχι σε κλίμακα): Μέτρηση ενός αυτοκινήτου-παιχνιδιού με δύο χάρακες. Στον χάρακα (α) η μικρότερη υποδιαίρεση είναι το 1 cm και στο χάρακα (β) το 1 mm.

Παρατηρώντας τον χάρακα (α), εκτιμούμε ότι η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται στα 6/10 του διαστήματος που μεσολαβεί ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm και 3 cm. Με βάση αυτό, δίνουμε εκτίμηση για την τιμή του μήκους του αυτοκινήτου ως 2,6 cm. Η εκτίμηση αυτή έχει δύο ψηφία, από τα οποία το τελευταίο (6) είναι αβέβαιο. Η τάξη του τελευταίου ψηφίου (mm) εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης.

Στο χάρακα (β), οι μικρότερες υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν σε χιλιοστά του μέτρου. Επαναλαμβάνουμε την μέτρηση και βρίσκουμε ότι η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm 6 mm, και 2 cm 7 mm.

Από το σχήμα εκτιμούμε ότι η άκρη βρίσκεται στα $7/10$ του διαστήματος που ορίζουν οι υποδιαιρέσεις του 6ου και 7ου χιλιοστού. Γράφουμε την εκτίμησή μας σαν $2,67\ \text{cm}$, με τρία ψηφία, από τα οποία το τελευταίο (7) είναι αβέβαιο.

Κάθε ψηφίο για την τιμή του οποίου είμαστε βέβαιοι, και το τελευταίο, εκτιμώμενο ψηφίο, είναι τα σημαντικά ψηφία της τιμής. Η τιμή $2,6\ \text{cm}$ έχει δύο σημαντικά ψηφία και η τιμή $2,67\ \text{cm}$ έχει τρία σημαντικά ψηφία.

Όταν καταγράφουμε την τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους πρέπει να την αποδίδουμε με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Έστω ότι κάποιος μαθητής μετρά το μήκος ενός τραπεζιού και δίδει σαν αποτέλεσμα την τιμή $2,413\ \text{m}$. Το τελευταίο ψηφίο της τιμής (3) εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης (χιλιοστό του μέτρου). Εάν η τιμή έχει αποδοθεί σωστά, το προτελευταίο ψηφίο (1) είναι *βέβαιο* και αντιστοιχεί στο εκατοστό του μέτρου, και το τελευταίο ψηφίο (3) είναι αβέβαιο. Υποθέτουμε ότι ο μαθητής χρησιμοποίησε μετρητική ταινία με υποδιαιρέσεις *εκατοστού του μέτρου,* και εκτίμησε το τελευταίο ψηφίο του χιλιοστού του μέτρου.

Προσδιορισμός Σημαντικών Ψηφίων Τιμών που Προκύπτουν από Μετρήσεις

Για την εύρεση των σημαντικών ψηφίων μιας τιμής από μέτρηση, ακολουθούνται οι εξής κανόνες:

(1) Το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι το πρώτο μη-μηδενικό ψηφίο *από τα αριστερά*.

(2) Αν ο αριθμός είναι ακέραιος, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του είναι το δεξιότερο μη μηδενικό ψηφίο.

(3) Αν ο αριθμός περιέχει υποδιαστολή, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο είναι το τελευταίο ψηφίο στα δεξιά, *ακόμα κι αν είναι μηδενικό*.

Παραδείγματα αυτών των κανόνων συνοψίζονται στον Πίνακα 1-5.

Πίνακας 1-5: Παραδείγματα τιμών και των αντίστοιχων σημαντικών ψηφίων. Τα σημαντικά ψηφία κάθε τιμής σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

Αριθμός	Πλήθος σημαντικών ψηφίων	Κανόνας
1417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
001417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
141700	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
1,417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
0,00001417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
1417,00	6 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
141700,0	7 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3

Οι αριθμοί 1417 και 001417 έχουν τέσσερα σημαντικά ψηφία. Ο αριθμός 141700 έχει επίσης τέσσερα σημαντικά ψηφία, επειδή *τα μηδενικά ψηφία στο τέλος ακεραίων δεν έχουν σημαντικότητα*. Ο ίδιος αριθμός θα μπορούσε να εκφρασθεί σαν 14170×10^{1} ή 1417000×10^{-1}. Ο αριθμός $0{,}00001417$ έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία, επειδή τα μηδενικά ψηφία μετά την υποδιαστολή και *πριν από το πρώτο μη-μηδενικό ψηφίο* δεν έχουν σημαντικότητα και απλά δηλώνουν την θέση της υποδιαστολής. Ο ίδιος αριθμός θα μπορούσε να εκφρασθεί σαν $0{,}1417\times10^{-4}$ ή $0{,}001417\times10^{-2}$, χωρίς να αλλάζει η ακρίβειά του. Αντίθετα, ο αριθμός $14{,}1700$ έχει έξι σημαντικά ψηφία. Τα μηδενικά ψηφία στο τέλος του αριθμού είναι σημαντικά, γιατί δηλώνουν ότι το μέγεθος έχει μετρηθεί με ακρίβεια μέχρι το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο.

Τιμές από μετρήσεις έχουν πεπερασμένο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Για παράδειγμα, η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 9{,}81\ m/s^2$, αντιπροσωπεύει πειραματικά μετρήσιμη ποσότητα και στην μορφή αυτή έχει τρία σημαντικά ψηφία.

Όλοι οι αριθμοί που δεν προκύπτουν από κάποια μέτρηση θεωρούνται ακριβείς και έχουν άπειρα σημαντικά ψηφία. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι αριθμητικές σταθερές. Όμως, κάποιες σταθερές, όπως ο αριθμός π, έχουν άπειρα ψηφία που δεν είναι όλα γνωστά. Η αντικατάσταση $\pi = 3{,}14$ σε μια σχέση δηλώνει ότι ο αριθμός π εκφράζεται με τρία σημαντικά ψηφία, οπότε και το αποτέλεσμα που προκύπτει θα έχει μέχρι τρία σημαντικά ψηφία. *Τέτοιες σταθερές πρέπει να εισάγονται με μεγαλύτερο αριθμό σημαντικών ψηφίων από τον αριθμό σημαντικών ψηφίων των μετρούμενων τιμών.*

Σημαντικά Ψηφία του Αποτελέσματος που Προκύπτει από Πράξεις μεταξύ Τιμών

Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της τιμής ενός μεγέθους που προκύπτει από κάποια μέτρηση εκφράζει την **ακρίβεια** με την οποία είναι γνωστό το μέγεθος. Έστω ότι η μέτρηση ενός χρονικού διαστήματος με διαφορετικά χρονόμετρα δίνει αποτελέσματα $75{,}4\ \mathrm{s}$ και $75{,}42\ \mathrm{s}$. Η πρώτη τιμή έχει ακρίβεια δεκάτου του δευτερολέπτου, ενώ η δεύτερη τιμή έχει ακρίβεια εκατοστού του δευτερολέπτου. Η πρώτη τιμή έχει μικρότερη ακρίβεια

Συχνά χρειάζεται να εκτελέσουμε πράξεις μεταξύ τιμών που έχουν προσδιορισθεί με διαφορετική ακρίβεια. Για να εκφράσουμε το τελικό αποτέλεσμα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

Όταν πρόκειται να εκτελέσουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ τιμών, προσδιορίζουμε **την τιμή με τη μικρότερη ακρίβεια**. Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις, εκφράζουμε το αποτέλεσμα με την **ακρίβεια** αυτής της τιμής.

Παραδείγματα πρόσθεσης/αφαίρεσης τιμών που προέρχονται από μετρήσεις δίνονται στον Πίνακα 1-6:

Πίνακας 1-6: Στην πρόσθεση και αφαίρεση τιμών, η ακρίβεια του αποτελέσματος καθορίζεται από την τιμή με τη μικρότερη ακρίβεια. Με μπλε χρώμα σημειώνεται το σημαντικό ψηφίο της τιμής με τη μικρότερη ακρίβεια, που καθορίζει την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Πρόσθεση – Αφαίρεση τιμών από μετρήσεις			
Πράξη	Μικρότερη ακρίβεια	Αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης	Αποτέλεσμα εκφρασμένο στην αποδεκτή ακρίβεια
$5,1+0,0032$	10^{-1}	$5,1032$	$5,1$
$82,54-23,3374$	10^{-2}	$59,2026$	$59,20$
$1390+12$	10^{1}	1402	1400
$4,52-4,42$	10^{-2}	$0,10$	$0,10$
$9,28+1,08$	10^{-2}	$10,36$	$10,36$

Στο τρίτο παράδειγμα του Πίνακα 1.6, ο ακέραιος αριθμός 1390 είναι εκφρασμένος με ακρίβεια 10^{1}, διότι το τελευταίο ψηφίο του (0) δεν είναι σημαντικό.

Στα τελευταία δύο παραδείγματα του Πίνακα 1.6, ολες οι τιμές είναι γνωστές με ακρίβεια εκατοστού (10^{-2}), και έχουν τρία σημαντικά ψηφία. Στη σωστή τελική μορφή, τα αποτελέσματα εκφράζονται με την ίδια ακρίβεια, 10^{-2}, αλλά έχουν δύο σημαντικά ψηφία (τρίτο παράδειγμα), και τέσσερα σημαντικά ψηφία (τέταρτο παράδειγμα).

Συνεπώς, στην πρόσθεση και αφαίρεση τιμών είναι δυνατόν το τελικό αποτέλεσμα να έχει διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων από όλες τις θεωρούμενες τιμές

Σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ακολουθούμε διαφορετικό κανόνα:

Σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μεταξύ τιμών, προσδιορίζουμε την τιμή **με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων**. Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις, εκφράζουμε το αποτέλεσμα με τον **αριθμό σημαντικών ψηφίων** αυτής της τιμής.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμού / διαίρεσης τιμών που προέρχονται από μετρήσεις δίνονται στον Πίνακα 1-7:

Πίνακας 1-7: Πολλαπλασιασμός και διαίρεση τιμών από μετρήσεις. Για κάθε πράξη σημειώνεται με κόκκινο χρώμα η τιμή με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Το αποτέλεσμα έχει τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με αυτή την τιμή.

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση τιμών από μετρήσεις			
Πράξη	Μικρότερος αριθμός σημαντικών ψηφίων	Αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης	Αποτέλεσμα εκφρασμένο με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων
$1{,}10 \times 1{,}70$	3	$1{,}87$	$1{,}87$
$1{,}10 \times 1{,}7$	2	$1{,}87$	$1{,}9$
$1{,}98/1{,}1$	2	$1{,}8$	$1{,}8$
$1{,}98/1{,}10$	3	$1{,}8$	$1{,}80$
$12 \times 1{,}4$	2	$16{,}8$	17

Στο τέλος του Κεφαλαίου 1 παρουσιάζουμε δύο επιπρόσθετα παραδείγματα, που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μετρούμενων τιμών.

Στρογγυλοποίηση Τιμών

Στα παραδείγματα πράξεων μεταξύ τιμών διαπιστώσαμε ότι συχνά χρειάζεται να τροποποιήσουμε τις τελικές τιμές, έτσι ώστε να περιέχουν το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Κατά την τροποποίηση αυτή γενικά απορρίπτουμε κάποια ψηφία και **στρογγυλοποιούμε τις τελικές τιμές**, ακολουθώντας τους εξής κανόνες:

α) Καθορίζουμε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων με τον οποίο πρέπει να εκφραστεί το τελικό αποτέλεσμα.

β) Εξετάζουμε το πρώτο ψηφίο *μετά από το τελευταίο, δεξιότερο σημαντικό ψηφίο* που θα διατηρήσουμε:

- Αν αυτό το πρώτο ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, εκτελούμε «στρογγυλοποίηση προς τα πάνω»: απορρίπτουμε όλα τα ψηφία στα δεξιά του τελευταίου σημαντικού ψηφίου, και αυξάνουμε το αποτέλεσμα στην αμέσως επόμενη δύναμη του 10.
- Αν το πρώτο ψηφίο μετά από το τελευταίο δεξιό σημαντικό ψηφίο είναι μικρότερο του 5,

εκτελούμε «στρογγυλοποίηση προς τα κάτω»: απορρίπτουμε όλα τα ψηφία στα δεξιά του τελευταίου σημαντικού ψηφίου.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να αποδώσουμε τον αριθμό $30,4747$ με <u>τέσσερα</u> σημαντικά ψηφία. Επειδή το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο (4) είναι μικρότερο του 5, ο αριθμός στρογγυλοποιείται στην τιμή $30,47$. Αντίστοιχα, ο αριθμός $30,4761$ στρογγυλοποιείται στην τιμή $30,48$, επειδή το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο (6) είναι μεγαλύτερο του 5. Ο αριθμός $27,499$ στρογγυλοποιείται με <u>δύο</u> σημαντικά ψηφία στην τιμή 27, και ο αριθμός $27,539$ στην τιμή 28.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι **δεν στρογγυλοποιούμε κατά την διάρκεια των υπολογισμών, αλλά πάντοτε αφού έχουμε καταλήξει στην απάντηση**. Όταν χρησιμοποιείτε την υπολογιστική σας θα πρέπει πάντοτε να συνδέετε τα ενδιάμεσα αποτελέσματά σας με τους επόμενους υπολογισμούς χωρίς να στρογγυλοποιείτε το ενδιάμεσο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1

Μια μέτρηση έχει εκτιμήσει ότι η διάμετρος D ενός κύκλου έχει μήκος $4,2\ \mathrm{m}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Το εμβαδόν του κύκλου δίνεται από την σχέση $E = \frac{\pi}{4}D^2$. Στην εφαρμογή της σχέσης, λαμβάνουμε υπ΄όψη τα εξής:

- Η διάμετρος D είναι γνωστή από τη μέτρηση με δύο σημαντικά ψηφία.
- Η αριθμητική σταθερά 4 έχει άπειρη ακρίβεια και δεν επηρεάζει τα σημαντικά ψηφία του αποτελέσματος.
- Η αριθμητική σταθερά π δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει άπειρη ακρίβεια, διότι έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι όλα γνωστά. Η σταθερά π πρέπει να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό με περισσότερα από τα δύο σημαντικά ψηφία της τιμής της διαμέτρου D.

Εισάγοντας κατευθείαν την τιμή του π από την υπολογιστική, παίρνουμε το αποτέλεσμα $E = \frac{\pi}{4}(4,2)^2\ \mathrm{m}^2 = 13,854424\ \mathrm{m}^2$. Επειδή η διάμετρος D χρησιμοποιήθηκε με δύο σημαντικά ψηφία και η πράξη έχει πολλαπλασιασμούς/διαιρέσεις, η τελική εκτίμηση για το εμβαδόν πρέπει να εκφραστεί με δύο σημαντικά ψηφία. Στρογγυλοποιώντας, δηλώνουμε ότι $E = 14\ \mathrm{m}^2$.

Παράδειγμα 2

Ο Usain Bolt διάνυσε στο παγκόσμιο πρωτάθλημα στίβου στο Βερολίνο τα $100,0\ \mathrm{m}$ σε χρόνο $9,58\ \mathrm{s}$. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αθλητή.

Λύση

Η μέση αριθμητική ταχύτητα του αθλητή ισούται με το πηλίκο της απόστασης που διένυσε ο αθλητής προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια της κίνησής του.

$$\text{Μέση ταχύτητα} = \frac{\text{Διανυόμενη απόσταση}}{\text{Χρονικό διάστημα}} =$$

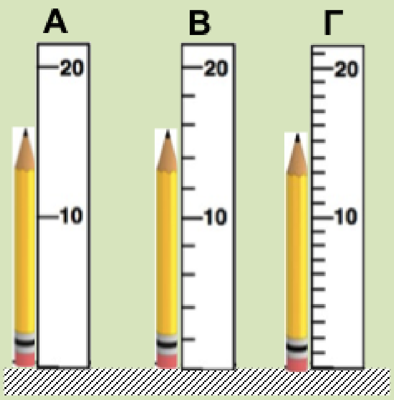
$$\frac{100,0}{9,58}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10,4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Η υπολογιστική δίνει ως αποτέλεσμα της διαίρεσης $100,0/9,58$ τον αριθμό $10,438413361169$. Για να εκφράσουμε τη μέση ταχύτητα του αθλητή με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, παρατηρούμε ότι η απόσταση $(100,0\ \mathrm{m})$ είναι γνωστή με τέσσερα σημαντικά ψηφία και το χρονικό διάστημα $(9,58\ \mathrm{s})$ με τρία σημαντικά ψηφία. Στον υπολογισμό της ταχύτητας τα δύο αυτά μεγέθη διαιρούνται μεταξύ τους. Συνεπώς, το αποτέλεσμα πρέπει να εκφραστεί με τρία σημαντικά ψηφία, όσα και το χρονικό διάστημα. Η τελική εκτίμηση μετά τη στρογγυλοποίηση είναι $10,4\ \mathrm{m/s}$.

Ένθετο: Διάκριση μεταξύ Ακρίβειας και Πιστότητας Μετρήσεων

Δύο πολύ σημαντικές έννοιες είναι η **ακρίβεια** και η **πιστότητα** των μετρήσεων. Οι έννοιες αυτές χαρακτηρίζουν την ποιότητα των μετρήσεων. *Όταν οι τιμές που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους είναι παρόμοιες μεταξύ τους,* οι μετρήσεις είναι **ακριβείς**. *Όταν οι τιμές που προκύπτουν από τις μετρήσεις είναι κοντά στην πραγματική τιμή*, οι μετρήσεις είναι **πιστές**. Διερευνούμε τη σημασία αυτών των εννοιών με το ακόλουθο παράδειγμα.

Θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός μολυβιού και έχουμε στην διάθεσή μας 3 διαφορετικούς χάρακες όπως φαίνονται στην Εικόνα 1-3.



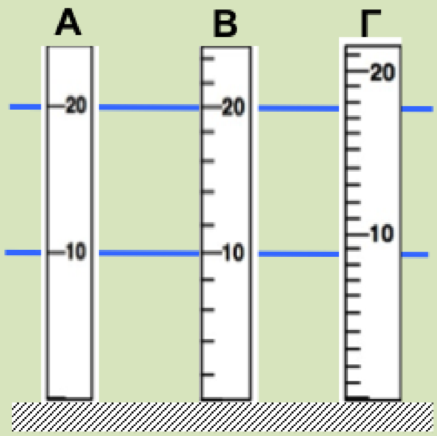
Εικόνα 1-3: Μέτρηση του μήκους του μολυβιού με τρεις διαφορετικά βαθμονομημένους χάρακες. Στην Α περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 10 cm και το μήκος ενός μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια εκατοστού. Στην Β περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 2 cm και το μήκος του μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια εκατοστού. Στην Γ περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 1 cm και το μήκος του μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια χιλιοστού.

Ο χάρακας Α έχει υποδιαιρέσεις κάθε 10 cm, ο χάρακας Β έχει υποδιαιρέσεις κάθε 2 cm, ενώ ο χάρακας Γ έχει υποδιαιρέσεις κάθε 1 cm. Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Α, παρατηρούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου στο μισό της απόστασης μεταξύ των 2 κύριων υποδιαιρέσεων του χάρακα, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου 15 cm.

Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Β, παρατηρούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι μεταξύ της 2^{ης} και 3^{ης} υποδιαίρεσης μετά τα 10 cm και εκτιμούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου 15 cm. Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Γ, διαπιστώνουμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι μεταξύ της 5^{ης} και 6^{ης} υποδιαίρεσης μετά τα 10 cm. Δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών υποδιαιρέσεων είναι 1 cm, εκτιμούμε ότι το μολύβι εκτείνεται 0,3 cm μετά τα 15 cm και το συνολικό εκτιμώμενο μήκος του είναι 15,3 cm.

Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις από διαφορετικούς μαθητές με το χάρακα Α είναι πιθανόν να δώσουν αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα, επειδή η εκτίμηση του τμήματος του μολυβιού ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις μπορεί να διαφέρει αρκετά μεταξύ μαθητών. Το εύρος των αποτελεσμάτων θα είναι μεγαλύτερο για το χάρακα Α, μικρότερο για το χάρακα Β και ακόμα μικρότερο για το χάρακα Γ, ο οποίος έχει τις μικρότερες υποδιαιρέσεις. *Η ακρίβεια των μετρήσεων μεγαλώνει από τον χάρακα Α προς το χάρακα Γ.*

Όμως, *μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις δεν συνδέεται πάντα και με μεγαλύτερη πιστότητα.* Θεωρείστε τους 3 χάρακες της Εικόνας 1-4.



Εικόνα 1-4: Σύγκριση της πιστότητας μεταξύ τριών χαράκων διαφορετικής ακρίβειας. Ο χάρακας Γ έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από τους χάρακες Α και Β, αλλά λανθασμένες υποδιαιρέσεις. Οι μετρήσεις του Γ έχουν μικρότερη πιστότητα από αυτές των Α και Β.

Οι χάρακες Α και Β είναι λιγότερο ακριβείς από τον Γ διότι έχουν μεγαλύτερες υποδιαιρέσεις. Το πρότυπο μήκος του Γ είναι διαφορετικό, ενώ αυτά των Α και Β ταιριάζουν μεταξύ τους. Αν οι υποδιαιρέσεις του χάρακα Γ είναι λανθασμένες, οι τιμές που θα προκύπτουν από τη χρήση του θα είναι πιο ακριβείς, αλλά θα δίνουν λανθασμένη εκτίμηση (θα έχουν μικρότερη πιστότητα από τις εκτιμήσεις των Α και Β). Στην πραγματικότητα, η ακρίβεια του Γ υποβαθμίζεται εξ αιτίας της μειωμένης πιστότητάς του. Ο χάρακας Γ δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για μετρήσεις.

Ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε την τιμή των μεγεθών στον πίνακα που ακολουθεί, αντικαθιστώντας τη δύναμη με κάποιο πρόθεμα από τον Πίνακα 1-4. Σας δίνεται ένα παράδειγμα.

Μέγεθος	Μέτρο (προσεγγιστικά)	
Διάμετρος ατόμου υδρογόνου	10^{-10} m	0,1 nm
Διάσταση βακτηρίου Ecoli	10^{-6} m	
Μήκος μύγας	10^{-3} m	
Ύψος Έβερεστ	10^{4} m	
Ακτίνα της Γης	$6,4 \cdot 10^{6}$ m	
Μάζα βακτηρίου Ecoli	10^{-15} kg	
Μάζα κουνουπιού	10^{-5} kg	
Μάζα μπλε Φάλαινας	10^{5} kg	
Χρόνος ζωής του μιονίου	10^{-6} s	

2. **Α.** Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-1 και τη σχέση $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ για τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας R, να υπολογίσετε τον όγκο της Γης (θεωρώντας ότι έχει σχήμα τέλειας σφαίρας).

Β. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-2, να υπολογίσετε την πυκνότητα της Γής. Να την συγκρίνετε με την πυκνότητα του νερού ($1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$).

3. **Α.** Με τη βοήθεια του Πίνακα 1-3, να υπολογίσετε την ηλικία του σύμπαντος σε χρόνια.

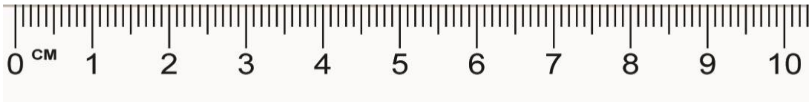
Β. Να υπολογίσετε την πυκνότητα του νερού σε $\mathrm{g/cm^3}$.

4. Σε ένα διαφορετικό σύστημα μονάδων, η μονάδα δύναμης ονομάζεται δύνη (dyn) και ισούται με $1\,\mathrm{g\ cm/s^2}$. Να μετατρέψετε την dyn σε N.

5. Στην αστρονομία χρησιμοποιείται σαν μονάδα μέτρησης μήκους το **έτος φωτός**, που ορίζεται ως *η απόσταση που διανύει το φώς στο κενό σε ένα έτος*. Αν η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι περίπου $300\,000\ \mathrm{km/s}$, να υπολογίσετε το έτος φωτός σε m.

6. Οι ακόλουθοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν τις τιμές που προκύπτουν από τις μετρήσεις διαφόρων μεγεθών: (α) 0,08135, (β) 00,00394, (γ) 060, (δ) 4,3940, (ε) 300, και (στ) 10,34520. Να προσδιορίσετε τα σημαντικά ψηφία κάθε τιμής.

7. Ο χάρακας του πιο κάτω σχήματος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του μήκους κάποιων αντικειμένων.



Λαμβάνοντας υπ΄όψη τις υποδιαιρέσεις του χάρακα, να προσδιορίσετε ποιά από τις επόμενες τριάδες μετρήσεων είναι εκφρασμένη με τη σωστή ακρίβεια.

Α. $1,8$ cm, 2 cm, $4,1$ cm

Β. $3,600$ cm, $4,8$ cm, $6,75$ cm

Γ. $1,5$ cm, $1,55$ cm, $5,3$ cm

Δ. $6,50$ cm, $6,55$ cm, $8,35$ cm

Ε. $6,5$ cm, $6,55$ cm, $8,35$ cm

8. Μια σειρά από ζυγούς διαφορετικής ακρίβειας χρησιμοποιείται για να μετρήσει τις μάζες θραυσμάτων από ένα ορυχείο χρυσού. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι $0,52865$ g, $39,42$ g, $15,1$ g, και $0,02896$ g.
Ακολουθώντας τον κανόνα που εφαρμόζεται στην πρόσθεση/αφαίρεση τιμών, να εκφράσετε τη συνολική μάζα των θραυσμάτων με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

9. Μετρήσεις του μήκους διαφόρων αποστάσεων, με κατάλληλα όργανα, έχουν σαν αποτέλεσμα τις ακόλουθες τιμές: $A = 38,275$ cm, $B = 0,134$ cm, $C = 38,322$ cm και $D = 1/3$ cm. Τα μεγέθη A, B, C, D υπεισέρχονται σε διάφορους φυσικούς τύπους με τους ακόλουθους συνδυασμούς: (α) $A \times B$, (β) $A - B$, (γ) $\left(C - A\right)/C$, (δ) $D \times C - D \times A$, (ε) $23 \times D$.
Να υπολογίσετε τους συνδυασμούς (α) – (ε), και να τους εκφράσετε με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

10. Ένας μαθητής μετρά τις διαστάσεις ενός κυλίνδρου. Βρίσκει ότι το ύψος του είναι $h = 3,42$ m, και η ακτίνα της βάσης του είναι $R = 2,05$ m. Η σχέση υπολογισμού του όγκου του κυλίνδρου είναι $V = \pi R^2 h$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου με το σωστό πλήθος σημαντικών ψηφίων.

11. Ο Πλούτωνας διαγράφει μια πολύ ασυμμετρική ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Στο μακρινότερο σημείο (αφήλιο) απέχει κατά $d_{\mu\varepsilon\gamma} = 7\,375\,927\,931$ km, από τον Ήλιο, και στο κοντινότερο (περιήλιο) απέχει κατά $d_{\varepsilon\lambda} = 4\,436\,824\,613$ km. Να εκφράσετε τη μέση απόσταση του Πλούτωνα από τον Ήλιο, $(d_{\mu\varepsilon\gamma} + d_{\varepsilon\lambda})/2$, σε αστρονομικές μονάδες (AU). Θεωρείστε ότι μια AU ισούται με $150\,000\,000$ km.

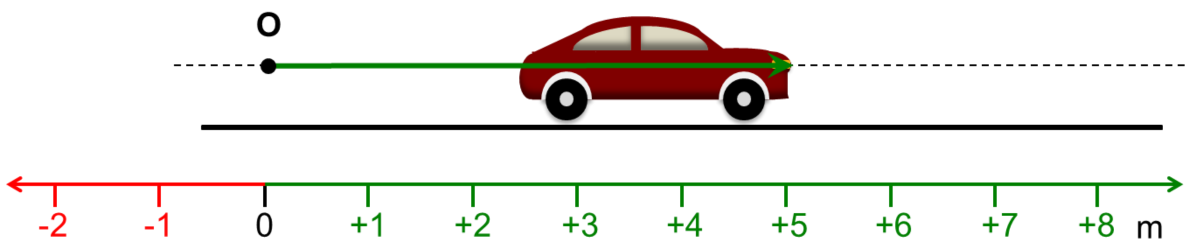
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

Στο **Κεφάλαιο 2** ασχολούμαστε με κινήσεις πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Μαθαίνουμε να:

- εντοπίζουμε ένα σώμα σε μια ευθεία χρησιμοποιώντας τα φυσικά μεγέθη της **θέσης** και της **μετατόπισης**
- περιγράφουμε τον ρυθμό μεταβολής της θέσης (με τον χρόνο), χρησιμοποιώντας την έννοια της **ταχύτητας**
- περιγράφουμε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας, χρησιμοποιώντας την έννοια της **επιτάχυνσης**
- κατασκευάζουμε γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου
- υπολογίζουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα και τη στιγμιαία ταχύτητα από τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου
- προσδιορίζουμε τη μετατόπιση χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου
- υπολογίζουμε τη μέση διανυσματική επιτάχυνση και τη στιγμιαία επιτάχυνση από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου
- εφαρμόζουμε τις κινηματικές εξισώσεις στις περιπτώσεις κίνησης με σταθερή ταχύτητα και σταθερή επιτάχυνση

Θέση

Εξηγούμε πώς περιγράφουμε τη **θέση** ενός σώματος, το οποίο μπορεί να κινείται σε μια ευθεία, με ένα παράδειγμα. Στην Εικόνα 2-1 απεικονίζεται ένα αυτοκίνητο σε έναν ευθύγραμμο, οριζόντιο δρόμο.



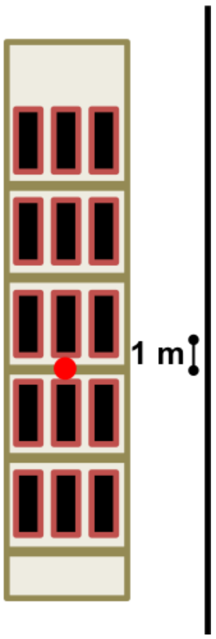
Εικόνα 2-1: Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο, οριζόντιο δρόμο. Το πράσινο βέλος αναπαριστά γραφικά το διάνυσμα θέσης του μπροστινού φαναριού ως προς το σημείο αναφοράς Ο.

Καθώς το αυτοκίνητο μετακινείται, το μπροστινό δεξιό φανάρι διαγράφει μια οριζόντια ευθεία που παριστάνεται από τη διακεκομμένη γραμμή. Σε κάθε θέση της ευθείας αντιστοιχούμε έναν αριθμό με τον ακόλουθο τρόπο. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα **σημείο αναφοράς Ο**, στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό μηδέν. Το σημείο αναφοράς διαχωρίζει την ευθεία κίνησης σε δύο ημιευθείες, τις οποίες ονομάζουμε «θετική» και «αρνητική». Σε κάθε θέση της θετικής ημιευθείας αντιστοιχούμε έναν θετικό αριθμό, και σε κάθε θέση της αρνητικής ημιευθείας έναν αρνητικό αριθμό. Ορίζεται ως **θετική κατεύθυνση** αυτή προς την οποία αυξάνονται οι τιμές των αριθμών. Η αντίθετη κατεύθυνση είναι η αρνητική. Η απόλυτη τιμή του αριθμού μαζί με τη μονάδα μέτρησης είναι το **μέτρο** της θέσης, και δηλώνει την απόσταση της θέσης από το σημείο αναφοράς. Το πρόσημο δηλώνει προς ποιά κατεύθυνση βρίσκεται η θέση σε σχέση με το σημείο αναφοράς. Το πρόσημο μαζί με το μέτρο είναι η **αλγεβρική τιμή** της θέσης.

Στην Εικόνα 2-1, η θέση του φαναριού έχει αλγεβρική τιμή $+5$ m. Αυτό σημαίνει ότι *το φανάρι απέχει* 5 m *από το σημείο αναφοράς, προς τη θετική κατεύθυνση.*

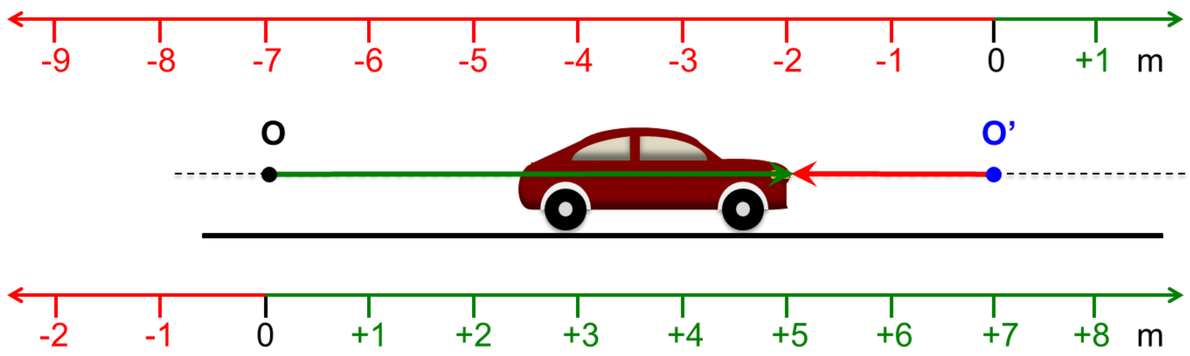
Η θέση ενός αντικειμένου (ως προς το σημείο αναφοράς) μπορεί επίσης να παρασταθεί γραφικά με ένα βέλος που έχει αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος (αιχμή) το αντικείμενο. Στην Εικόνα 2-1 απεικονίζεται το βέλος που παριστάνει τη θέση του φαναριού. Το *μήκος* του βέλους ισούται με την απόσταση του φαναριού από το σημείο αναφοράς (στην κλίμακα αποστάσεων του σχήματος). Η αιχμή του βέλους είναι προσανατολισμένη προς τη θετική κατεύθυνση, σε συμφωνία με τη θετική αλγεβρική τιμή της θέσης του φαναριού. Παρομοίως, αν η αλγεβρική τιμή μιας θέσης είναι αρνητική, η αιχμή του αντίστοιχου βέλους είναι προσανατολισμένη προς την αρνητική κατεύθυνση.

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, μεγέθη που ορίζονται πλήρως αν είναι γνωστά το μέτρο και η κατεύθυνσή τους, ονομάζονται διανυσματικά. **Η θέση είναι διανυσματικό μέγεθος**.



Άσκηση: Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν ουρανοξύστη. Χρησιμοποιώντας σαν σημείο αναφοράς την κόκκινη βούλα, να προσδιορίσετε τις θέσεις των διαφόρων ορόφων στον κατακόρυφο άξονα (κατακόρυφη ευθεία). Να επιλέξετε αυθαίρετα την θετική και αρνητική κατεύθυνση. Στο σχήμα σημειώνεται το μήκος ίσο με τη μονάδα μέτρησης (1 m).

Η αλγεβρική τιμή της θέσης ενός σώματος εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αναφοράς. Ο επάνω άξονας της Εικόνας 2-2 περιέχει τις αλγεβρικές τιμές θέσεων που έχουν υπολογιστεί ως προς το σημείο αναφοράς Ο΄. Η θέση του μπροστινού φαναριού του αυτοκινήτου έχει τιμή -2 m ως προς το Ο΄ και απεικονίζεται γραφικά με το κόκκινο βέλος.

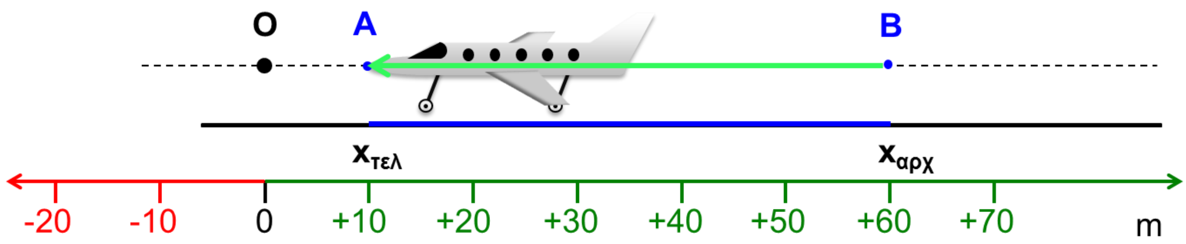


Εικόνα 2-2: Το διάνυσμα θέσης εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Το πράσινο βέλος και το κόκκινο βέλος παριστάνουν γραφικά τα διανύσματα θέσης του μπροστινού φαναριού ως προς σημεία αναφοράς Ο και Ο', αντίστοιχα.

Μετατόπιση και Διανυόμενη Απόσταση

Η γραμμή που συνδέει τις θέσεις από τις οποίες διέρχεται το αντικείμενο κατά τη διάρκεια της κίνησής του ονομάζεται **τροχιά**. Δύο μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της κίνησης ενός αντικειμένου είναι η **μετατόπιση** και **η διανυόμενη απόσταση**. Θα μελετήσουμε αυτά τα δύο μεγέθη για κίνηση σε μία ευθεία. Στο τέλος της ενότητας θα συζητήσουμε τη γενίκευσή τους για καμπυλόγραμμες κινήσεις.

Η Εικόνα 2-3 απεικονίζει ένα αεροπλάνο που τροχιοδρομεί σε έναν ευθύγραμμο διάδρομο απογείωσης. Η μύτη του αεροπλάνου διαγράφει τη διακεκομμένη ευθεία. Η θέση της μύτης υπολογίζεται ως προς το σημείο αναφοράς Ο. Οι διάφορες τιμές της θέσης αναγράφονται στο κάτω μέρος της Εικόνας. Η μύτη βρίσκεται αρχικά στο σημείο Β με θέση $x_{αρχ} = +60\text{ m}$ και μετακινείται στο σημείο Α με θέση $x_{τελ} = +10\text{ m}$. Η τροχιά της μύτης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ.



Εικόνα 2-3: Ένα αεροπλάνο τροχιοδρομεί πάνω σε ευθύγραμμο διάδρομο απογείωσης. Η μύτη του αεροπλάνου κινείται πάνω στη διακεκομμένη γραμμή από το σημείο Β στο σημείο Α. Η μετατόπιση της μύτης ισούται με τη διαφορά της αρχικής από την τελική θέση και αναπαρίσταται γραφικά με το πράσινο βέλος.

Ως **μετατόπιση** ενός αντικειμένου *ορίζεται η αλλαγή στη θέση του*. **Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος** όπως η θέση. Για ευθύγραμμη κίνηση, η διεύθυνση της μετατόπισης συμπίπτει με την ευθεία κίνησης και η φορά της είναι από την αρχική στην τελική θέση. Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης, Δx, υπολογίζεται *αφαιρώντας την αρχική από την τελική θέση*:

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi}\text{, κίνηση σε ευθεία γραμμή}$$

Το πρόσημο της διαφοράς δηλώνει την κατεύθυνση της μετατόπισης: *η μετατόπιση είναι θετική αν το σώμα μετακινείται προς τη θετική κατεύθυνση*. Όταν δηλώνουμε τη μετατόπιση σε μία διάσταση πρέπει να συμπεριλαμβάνουμε το πρόσημο για να καθορίσουμε την κατεύθυνσή της. *Το μέτρο της μετατόπισης ισούται με την απόσταση ανάμεσα στην τελική και στην αρχική θέση*. Στο παράδειγμα της Εικόνας 2-3, η μετατόπιση της μύτης του αεροπλάνου έχει τιμή:

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi} = (+10\text{ m}) - (+60\text{ m}) = -50\text{ m}$$

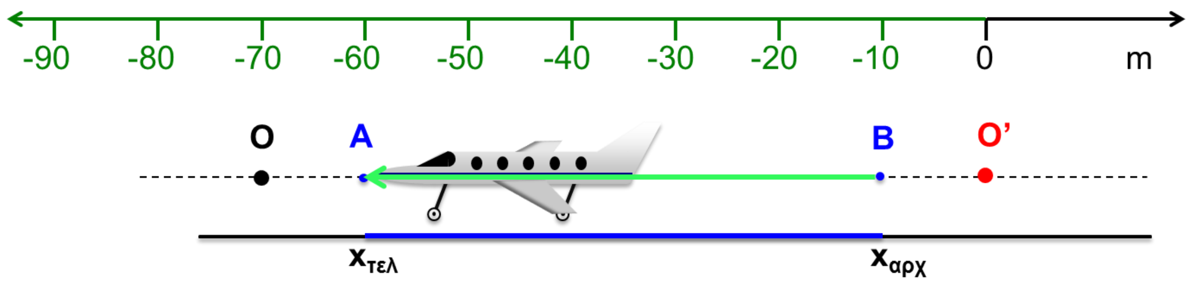
Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η τελική θέση της μύτης έχει μικρότερη τιμή από ό,τι η αρχική θέση, γι' αυτό η μετατόπιση της μύτης είναι προς την αρνητική κατεύθυνση.

Η μετατόπιση παριστάνεται γραφικά με ένα βέλος που ενώνει την αρχική και τελική θέση και έχει φορά από την αρχική προς την τελική θέση. Το μήκος του βέλους ισούται με το μέτρο της μετατόπισης (στην κλίμακα του σχήματος). Στην Εικόνα 2-3, το διάνυσμα της μετατόπισης της μύτης του αεροπλάνου απεικονίζεται με το πράσινο βέλος.

Η μετατόπιση ενός σώματος είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου αναφοράς. Στην Εικόνα 2-4 απεικονίζονται οι τιμές των θέσεων της μύτης του αεροπλάνου ως προς ένα δεύτερο σημείο αναφοράς Ο’. Η αρχική και τελική θέση έχουν τιμές -10 m και -60 m, αντίστοιχα, ως προς το σημείο Ο’. Η μετατόπιση ως προς το Ο’ ισούται με τη διαφορά των τιμών της αρχικής και τελικής θέσης ως προς το Ο’:

$$\Delta x' = x'_{\tau\varepsilon\lambda} - x'_{\alpha\rho\chi} = (-60 \text{ m}) - (-10 \text{ m}) = -50 \text{ m}$$

Η ίδια τιμή είχε υπολογιστεί ως προς το σημείο αναφοράς Ο (Εικόνα 2-3).



Εικόνα 2-4: Η μετατόπιση ενός αντικειμένου δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Ως προς το σημείο αναφοράς Ο΄ προκύπτουν οι τιμές θέσης που αναγράφονται στον άξονα. Για μετακίνηση από το Β στο Α, η τιμή της μετατόπισης είναι -50 m. Η ίδια τιμή υπολογίστηκε ως προς το σημείο αναφοράς Ο (Εικόνα 2-3). Το διάνυσμα της μετατόπισης παριστάνεται με το πράσινο βέλος.

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος για την περιγραφή της κίνησης είναι η **διανυόμενη απόσταση,** η οποία ορίζεται ως *το συνολικό μήκος της διαδρομής* που διαγράφει το κινούμενο αντικείμενο. **Η διανυόμενη απόσταση είναι μονόμετρο μέγεθος**, όπως και το μήκος, και έχει πάντα θετική τιμή, ανεξάρτητα από τη φορά της κίνησης. Στα παραδείγματα των Εικόνων 2-3 και 2-4, η απόσταση που διανύεται από τη μύτη του αεροπλάνου ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΑ, $s = 50$ m.

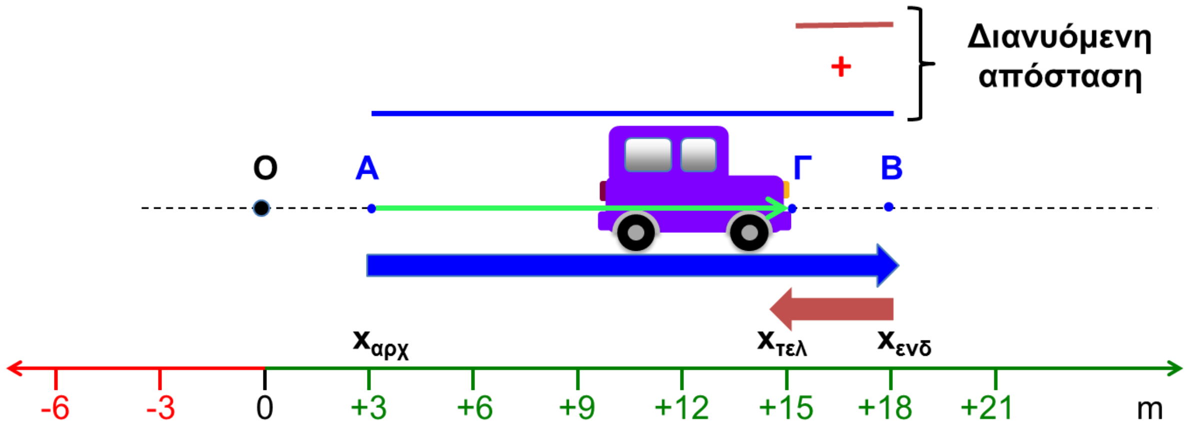
Στη γενική περίπτωση, η διανυόμενη απόσταση δεν ισούται με το μέτρο της μετατόπισης. Το παράδειγμα της Εικόνας 2-5 περιγράφει μια πιο σύνθετη κίνηση: Το αυτοκίνητο ξεκινά από το σημείο Α ($x_{\alpha\rho\chi} = +3$ m), κάνει μια ενδιάμεση στάση στο σημείο Β ($x_{ενδ} = +18$ m), και στη συνέχεια οπισθοδρομεί και σταματά στο σημείο Γ ($x_{τελ} = +15$ m). Για να υπολογίσουμε τη συνολική μετατόπιση αφαιρούμε την τιμή της αρχικής θέσης από την τιμή της τελικής θέσης:

$$\Delta x = x_{τελ} - x_{αρχ} = (+15 \text{ m}) - (+3 \text{ m}) = +12 \text{ m}$$

Το διάνυσμα της μετατόπισης παριστάνεται γραφικά από το πράσινο βέλος.

Η συνολική διανυόμενη απόσταση ισούται με το *συνολικό μήκος* της διαδρομής. Για να την υπολογίσουμε πρέπει να αθροίσουμε τα μήκη των διαδρομών ΑΒ και ΒΓ, αγνοώντας ότι οι διαδρομές διαγράφονται με αντίθετη φορά:

$$s = 15 \text{ m} + 3 \text{ m} = 18 \text{ m}$$



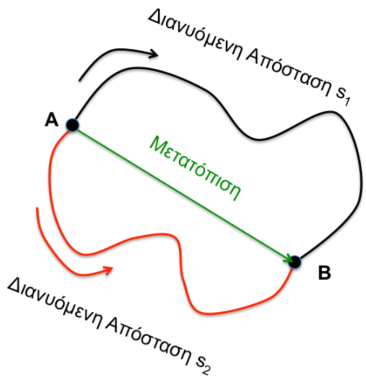
Εικόνα 2-5: Παράδειγμα στο οποίο η διανυόμενη απόσταση δεν ισούται με το μέτρο της μετατόπισης. Η άκρη του αυτοκινήτου μετακινείται από το σημείο Α στο ενδιάμεσο σημείο Β και οπισθοδρομεί στο σημείο Γ. Η μετατόπιση της άκρης (πράσινο βέλος) έχει μέτρο 12 m. Η συνολική διανυόμενη απόσταση είναι το άθροισμα των μηκών ΑΒ + ΒΓ (18 m).

Συνεπώς, στο παράδειγμα της Εικόνας 2-5 η διανυόμενη απόσταση είναι μεγαλύτερη από το μέτρο της μετατόπισης.

Μετατόπιση και Διανυόμενη Απόσταση σε Καμπυλόγραμμη Κίνηση

Μπορούμε να κατανοήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στη μετατόπιση και τη διανυόμενη απόσταση με τη βοήθεια ενός γενικότερου παραδείγματος καμπυλόγραμμης κίνησης.

Στην Εικόνα 2-6, η μύτη ενός μολυβιού έχει μετακινηθεί πάνω σε μια επίπεδη κόλλα χαρτιού από το σημείο A στο σημείο B ακολουθώντας δύο διαφορετικές διαδρομές, που υποδεικνύονται αντίστοιχα από τη μαύρη και την κόκκινη γραμμή. Φαντασθείτε ότι τοποθετούμε μια κλωστή επάνω στη μαύρη γραμμή, έτσι ώστε η κλωστή να αναπαράγει ακριβώς το σχήμα της γραμμής. Αν τεντώσουμε την κλωστή και μετρήσουμε το μήκος της, θα έχουμε προσδιορίσει *τη διανυόμενη απόσταση*. Το μήκος αυτό είναι πάντα θετικό και δεν εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Αν η μύτη κινηθεί πάνω στη μαύρη γραμμή από το B στο A, θα έχει διανύσει την ίδια απόσταση.



Εικόνα 2-6: Διανυόμενη απόσταση και μετατόπιση σε καμπυλόγραμμη κίνηση

Το πράσινο βέλος που ξεκινά από την αρχική θέση A και καταλήγει στην τελική θέση B παριστάνει τη μετατόπιση της μύτης του μολυβιού. Το μήκος του βέλους ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB (την απόσταση ανάμεσα στα σημεία A και B), και εκφράζει το μέτρο της μετατόπισης. Αν η μύτη του μολυβιού καταλήξει στο ίδιο σημείο από όπου ξεκίνησε, η μετατόπιση θα έχει μηδενικό μέτρο.

Το μέτρο της μετατόπισης δεν ισούται γενικά με τη *διανυόμενη* απόσταση. Το μήκος της μαύρης, αλλά και της κόκκινης γραμμής, είναι μεγαλύτερο από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Παρόλο που οι δύο γραμμές που σχημάτισε το μολύβι έχουν διαφορετικό μήκος, αντιστοιχούν στην ίδια μετατόπιση. Γενικά, η μετατόπιση *δεν εξαρτάται από τη διαδρομή* που ακολουθεί το σώμα για να μεταβεί από την αρχική στην τελική θέση.

Η κατεύθυνση του βέλους της μετατόπισης εκφράζει πώς είναι προσανατολισμένο το τελικό σημείο ως προς το αρχικό. Αν η μετακίνηση γίνει με την αντίθετη φορά (από το B στο A), το βέλος αντιστρέφεται.

Χρονική Στιγμή και Χρονικό Διάστημα

Χρησιμοποιούμε την έννοια της **χρονικής στιγμής** για να προσδιορίσουμε πότε έλαβε χώρα ένα στιγμιαίο γεγονός. Το **χρονικό διάστημα** Δt μεταξύ δύο χρονικών στιγμών ισούται με τη διαφορά της αρχικής στιγμής t_1 από την τελική στιγμή t_2:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Για παράδειγμα, έστω ότι σε έναν αγώνα μαραθωνίου δρόμου το όπλο του κριτή εκπυρσοκροτεί όταν η ένδειξη του ρολογιού είναι 9:00:00 πμ., και ένας αθλητής αγγίζει τη γραμμή τερματισμού όταν η ένδειξη γίνει 12:40:08 μμ. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο αυτών στιγμών είναι ίσο με 3 ώρες, 40 λεπτά και 8 δευτερόλεπτα, και αντιστοιχεί στην επίδοση του αθλητή.

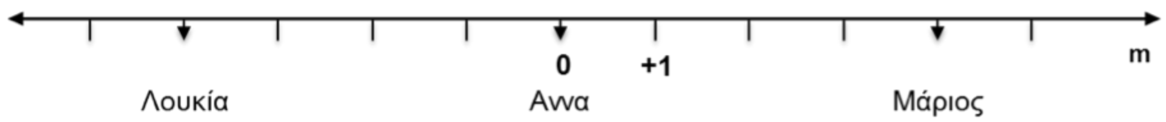
Ερωτήσεις Κατανόησης

Έστω ότι θέλετε να εντοπίσετε ένα σώμα που μπορεί να μετακινείται πάνω σε μια ευθεία. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Ερώτηση	**Σωστό/Λάθος**
Το σημείο αναφοράς, ως προς το οποίο μετρώνται οι θέσεις, μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα	
Η θέση είναι μονόμετρο μέγεθος	
Όταν ένα σώμα μετακινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, η διανυόμενη απόσταση είναι αρνητική	
Όταν η αρχική και τελική θέση ενός κινούμενου σώματος είναι αρνητικές, η μετατόπιση του σώματος είναι αρνητική	
Όταν η αρχική και τελική θέση ενός κινούμενου σώματος είναι θετικές, η μετατόπιση του σώματος είναι θετική	
Η μετατόπιση δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς	
Η διανυόμενη απόσταση εξαρτάται από το σημείο αναφοράς	
Η διανυόμενη απόσταση ισούται πάντα με την τιμή της μετατόπισης	

Ασκήσεις

1. Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει τη γραμμή εκκίνησης ενός μαθητικού αγώνα δρόμου. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών υποδιαιρέσεων έχει μήκος 1 m.



Α. Το σημείο αναφοράς τοποθετείται στη θέση της Άννας και οι τιμές των θέσεων αυξάνονται από τη Λουκία προς το Μάριο. Να συμπληρώσετε τις τιμές των θέσεων της Λουκίας και του Μάριου.

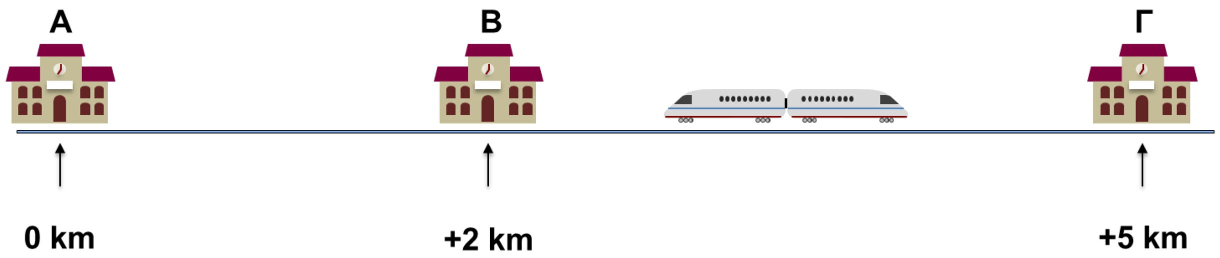
Β. Να προσδιορίσετε τη μετατόπιση του κριτή και την απόσταση που διανύει καθώς μετακινείται από τη θέση του Μάριου στη θέση της Λουκίας. Εξαρτάται η μετατόπιση από την επιλογή του σημείου αναφοράς;

2. Ένας οδηγός κινείται σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, με διεύθυνση Νότου – Βορρά. Ξεκινά την κίνησή του 6 km βόρεια μιας διασταύρωσης και διανύει 30 km προς τον Νότο, όπου και σταματά.

Θεωρείστε σαν σημείο αναφοράς το κέντρο της διασταύρωσης. Αφού επιλέξετε τη θετική κατεύθυνση, να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της αρχικής και τελικής θέσης του οδηγού. Να σχεδιάσετε τον δρόμο και να τοποθετήσετε την αρχική και τελική θέση του οδηγού.

3. Να επιχειρηματολογήσετε κατά πόσο ο χιλιομετρητής ενός αυτοκινήτου καταγράφει τη μετατόπιση ή την διανυόμενη απόσταση από το αυτοκίνητο.

4. Ένα τρένο εκτελεί ευθύγραμμη διαδρομή μεταξύ των σταθμών Α, Β και Γ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Οι θέσεις των σταθμών ως προς σημείο αναφοράς το κέντρο του σταθμού Α υποδεικνύονται κάτω από κάθε σταθμό.



Α. Να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του τρένου και τη συνολική διανυόμενη απόσταση για τις εξής διαδρομές:

(1) $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \Gamma$

(2) $\Gamma \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$

(3) $\mathrm{B} \to \Gamma \to \mathrm{B} \to \mathrm{A}$

(4) $\mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \Gamma \to \mathrm{B}$

Β. Έστω ότι χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς *το κέντρο του σταθμού Β* και οι τιμές των θέσεων *μεγαλώνουν από αριστερά προς τα δεξιά*, όπως κοιτάμε το σχήμα. Να υπολογίσετε την τιμή των θέσεων των σταθμών Α, Β και Γ ως προς το νέο σημείο αναφοράς. Πώς μεταβάλλονται τα αποτελέσματα του ερωτήματος Α αν χρησιμοποιηθεί ο σταθμός Β σαν σύστημα αναφοράς;

5. Στην ευθύγραμμη κίνηση, να αποδείξετε ότι η μετατόπιση ενός σώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αναφοράς. **Υπόδειξη:** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις αλγεβρικές τιμές της θέσης του σώματος ως προς δύο σημεία αναφοράς Ο και Ο΄ με την αλγεβρική τιμή της θέσης του Ο΄ ως προς το Ο.

Η Έννοια της Ταχύτητας

Η θέση και η μετατόπιση χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό ενός σώματος. Για την περιγραφή της κίνησης ενός σώματος, χρειάζεται να καθορίσουμε πώς μεταβάλλεται η θέση του με τον χρόνο. Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης εκφράζεται από το φυσικό μέγεθος της **ταχύτητας**. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε την έννοια της ταχύτητας.

Μέση Αριθμητική Ταχύτητα

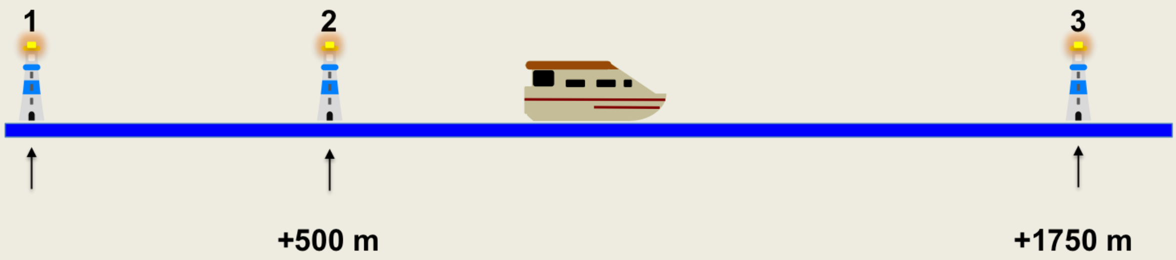
«*Ο Michael Johnson έκανε παγκόσμιο ρεκόρ* 43,18 s *στο μήκος των* 400 m *σε ανοιχτό στίβο (Σεβίλλη, 1999), το οποίο ισχύει μέχρι σήμερα (2015)*». «*Ένα αυτοκίνητο κινείται αργά μέσα σε μια κατοικημένη περιοχή και γρήγορα σε έναν αυτοκινητόδρομο*». Προτάσεις όπως οι παραπάνω χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή για να εκφράσουν κάποιες συγκρίσεις: Ο Michael Johnson έτρεξε τη συγκεκριμένη απόσταση των 400 m σε μικρότερο χρονικό διάστημα από κάθε άλλο άνθρωπο μέχρι σήμερα. Το αυτοκίνητο διανύει στο ίδιο χρονικό διάστημα μεγαλύτερη απόσταση στον αυτοκινητόδρομο από ό,τι στην κατοικημένη περιοχή.

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο διανύεται μια απόσταση είναι η **μέση αριθμητική ταχύτητα** $\upsilon_{\mu\alpha}$:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{\text{Διανυόμενη απόσταση}}{\text{Χρονικό διάστημα}} = \frac{s}{\Delta t}$$

Η διανυόμενη απόσταση και το χρονικό διάστημα είναι μονόμετρα, θετικά μεγέθη. Συνεπώς, *η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει θετική τιμή*. Από τον πιο πάνω ορισμό προκύπτει ότι η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι το m/s.

Παράδειγμα: Ένα πλοιάριο κινείται κατά μήκος μιας στενής ευθύγραμμης διώρυγας, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:



Α. Το πλοίο εκτελεί τη διαδρομή $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ σε 25 λεπτά. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα.

Για να υπολογίσουμε τη μέση αριθμητική ταχύτητα, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τη συνολική διανυόμενη απόσταση, δηλαδή το συνολικό μήκος της διαδρομής. Το πλοίο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση στο τμήμα της διαδρομής $1 \to 3$, και προς την αρνητική κατεύθυνση στο τμήμα $3 \to 1$. Και στα δύο τμήματα, η διανυόμενη απόσταση είναι θετική.

Η συνολική διανυόμενη απόσταση υπολογίζεται από το άθροισμα των αποστάσεων στα δύο τμήματα: $s = 1\,750\ \text{m} + 1\,750\ \text{m} = 3500\ \text{m}$. Συνεπώς, η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι:

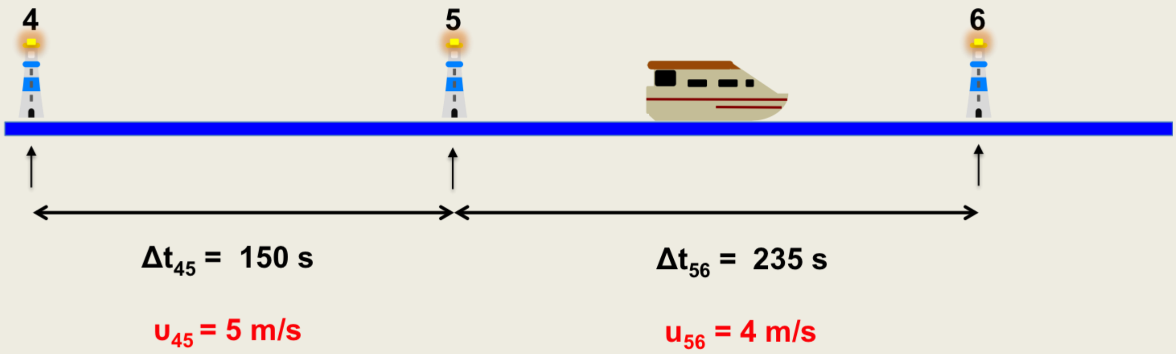
$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{3\,500}{25}\ \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{3\,500}{25}\ \frac{\text{m}}{\text{min}}\ \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}}\ \frac{60\ \text{min}}{3600\ \text{s}} = 8{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Β. Το πλοίο εκτελεί τη διαδρομή $1 \to 2$ με μέση αριθμητική ταχύτητα $4\ \text{m/s}$. Ποια είναι η χρονική διάρκεια της διαδρομής;

Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας μπορούμε να λύσουμε ως προς τη χρονική διάρκεια:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{\upsilon_{\mu\alpha}} = \frac{500}{4}\ \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 125\ \text{s}$$

Γ. Ο οδηγός του πλοίου εισέρχεται σε μια περιοχή του καναλιού όπου δεν υπάρχει σήμανση για την απόσταση μεταξύ των φάρων 4, 5 και 6. Για να διανύσει την απόσταση $4 \to 5$ με μέση ταχύτητα $5\ \text{m/s}$ χρειάζεται $150\ \text{s}$, και για να διανύσει την απόσταση $5 \to 6$ με μέση ταχύτητα $4\ \text{m/s}$ χρειάζεται $235\ \text{s}$. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $4 \to 5$ και $5 \to 6$.



Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας μπορούμε να λύσουμε ως προς τη διανυόμενη απόσταση:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow s = \upsilon_{\mu\alpha}\,\Delta t$$

Για την απόσταση $4 \rightarrow 5$:

$$s_{4\rightarrow5} = \upsilon_{4\rightarrow5} \times \Delta t_{4\rightarrow5} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 150\ \text{s} = 750\ \text{m}$$

Για την απόσταση $5 \rightarrow 6$:

$$s_{5\rightarrow6} = \upsilon_{5\rightarrow6} \times \Delta t_{5\rightarrow6} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 235\ \text{s} = 940\ \text{m}$$

Δ. Ποιά η μέση αριθμητική ταχύτητα του πλοίου <u>για τη συνολική διαδρομή</u> $4 \rightarrow 6$;

Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s_{4\rightarrow6}}{\Delta t_{4\rightarrow6}} = \frac{s_{4\rightarrow5} + s_{5\rightarrow6}}{\Delta t_{4\rightarrow5} + \Delta t_{5\rightarrow6}} = \frac{750+940}{150+235}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}39\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μέση Διανυσματική Ταχύτητα

Στο Κεφάλαιο 1 μάθαμε ότι η απόσταση που διανύει ένα κινούμενο σώμα δεν εκφράζει, στη γενική περίπτωση, την αλλαγή της θέσης του. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα αυτοκίνητο κινήθηκε για διάστημα μιας ώρας με μέση αριθμητική ταχύτητα 60 km/h. Από αυτή την πληροφορία υπολογίζουμε ότι η συνολική απόσταση που διάνυσε το αυτοκίνητο ήταν 60 km, αλλά δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα μοναδικό συμπέρασμα για *τη μεταβολή στη θέση του αυτοκινήτου*: Είναι πιθανό το αυτοκίνητο να μετακινήθηκε κατά 60 km, ή τελικά να επέστρεψε στο ίδιο αρχικό σημείο.

Το φυσικό μέγεθος που συνδέει την αλλαγή της θέσης ενός κινούμενου σώματος με το χρονικό διάστημα της κίνησής του είναι η **μέση διανυσματική ταχύτητα** $\upsilon_{\mu\delta}$:

$$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\text{Μετατόπιση}}{\text{Χρονικό διάστημα}} = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

Η κατεύθυνση της μέσης διανυσματικής ταχύτητας συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης. Αν ένα σώμα κινείται πάνω σε μια ευθεία και μετατοπίζεται κατά Δx στο χρονικό διάστημα Δt, η μέση διανυσματική ταχύτητα δίδεται από τη σχέση:

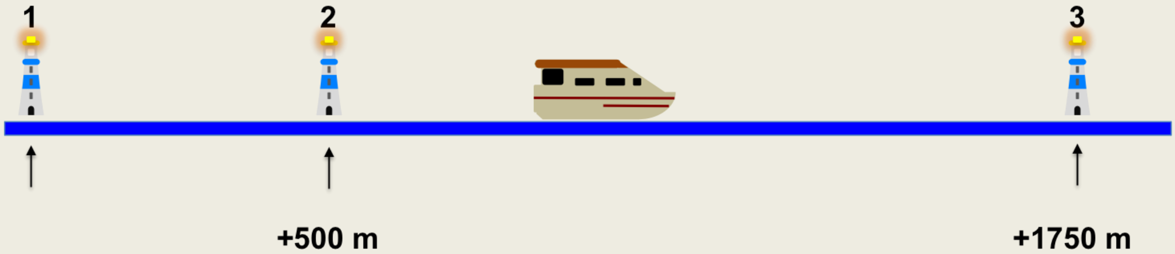
$$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,, \quad \text{μετατόπιση σε ευθεία}$$

Παράδειγμα: Το πλοίο στο προηγούμενο παράδειγμα εκτελεί τη διαδρομή $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$. Σε κάθε τμήμα της διαδρομής μεταξύ δύο διαδοχικών φάρων, η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι ίση με $5\ \mathrm{m/s}$. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοίου στις διαδρομές $1 \to 3$, $1 \to 3 \to 2$, $1 \to 3 \to 1$.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα σε μια διαδρομή χρειάζεται να γνωρίζουμε τη χρονική της διάρκεια και τη μετατόπιση του πλοίου.

Η χρονική διάρκεια κάθε διαδρομής μπορεί να υπολογιστεί από τη διανυόμενη απόσταση και τη μέση αριθμητική ταχύτητα.



Ας θεωρήσουμε τη διαδρομή $1 \to 3$. Η συνολική διανυόμενη απόσταση από το πλοίο είναι $s_{1\to 3} = 1750\ \mathrm{m}$, όση και η διαφορά θέσεων μεταξύ των φάρων 1 και 3. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής $1 \to 3$ είναι:

$$\Delta t_{1\to 3} = \frac{s_{1\to 3}}{\upsilon_{\mu\alpha}} = \frac{1750}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = 350\ \mathrm{s}$$

Για να βρούμε το μήκος της διαδρομής $1 \to 3 \to 2$ πρέπει να προσθέσουμε τα μήκη των επιμέρους διαδρομών $1 \to 3$ και $3 \to 2$. Το μήκος της διαδρομής $3 \to 2$ είναι η απόσταση μεταξύ των φάρων 2 και 3:

$$s_{3\to 2} = 1\,750\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{m} = 1\,250\ \mathrm{m}$$

Έτσι, η συνολική διανυόμενη απόσταση είναι το άθροισμα

$$s_{1\to 3} + s_{3\to 2} = 1\,750\ \mathrm{m} + 1\,250\ \mathrm{m} = 3000\ \mathrm{m}$$

και η διάρκεια της διαδρομής είναι:

$$\Delta t_{1\to 3\to 2} = \frac{3000}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = 600\ \mathrm{s}$$

Όμοια, η συνολική διανυόμενη απόσταση από το πλοίο για τη διαδρομή $1 \to 3 \to 1$ είναι

$$2 \times 1\,750 \text{ m} = 3\,500 \text{ m}.$$

Συνεπώς, η χρονική διάρκεια είναι:

$$\Delta t_{1\to 3\to 2} = \frac{1\,750 + 1\,750}{5} \, \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 700 \text{ s}$$

Για να υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα, χρησιμοποιούμε τη μετατόπιση (τελική θέση – αρχική θέση). Σε αντίθεση με τον υπολογισμό της διανυόμενης απόστασης, *για τον υπολογισμό της μετατόπισης δεν χρειάζεται να χωρίσουμε τη διαδρομή σε επιμέρους τμήματα*. Για κάθε διαδρομή, η συνολική μετατόπιση προσδιορίζεται αν από την τελική θέση αφαιρέσουμε την αρχική:

α) Διαδρομή $1 \to 3$:

$$\upsilon_{\mu\,\delta} = \frac{\Delta x_{1\to 3}}{\Delta t_{1\to 3}} = \frac{x_3 - x_1}{\Delta t_{1\to 3}} = \frac{1750}{350} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Διαδρομή $1 \to 3 \to 2$:

$$\upsilon_{\mu\,\delta} = \frac{\Delta x_{2\to 1}}{\Delta t_{1\to 3\to 2}} = \frac{500}{600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Διαδρομή $1 \to 3 \to 1$:

$$\upsilon_{\mu\,\delta} = \frac{\Delta x_{1\to 1}}{\Delta t_{1\to 3\to 1}} = \frac{0}{700} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στις διαδρομές $1 \to 3 \to 2$ και $1 \to 3 \to 1$ *η τιμή της μετατόπισης δεν συμπίπτει με τη διανυόμενη απόσταση*, επειδή η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει κατά το χρονικό διάστημα, για το οποίο υπολογίζουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα. Στη διαδρομή $1 \to 3 \to 1$ η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ίση με μηδέν, επειδή η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν.

Ερώτηση: Να συγκρίνετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοίου για τις διαδρομές $1 \to 2$ και $1 \to 3 \to 2$.

Στιγμιαία Ταχύτητα

Στο τελευταίο παράδειγμα είδαμε ότι *η μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοιαρίου εξαρτάται από το χρονικό διάστημα*. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός αντικειμένου *κάποια χρονική στιγμή* t, πρέπει να προσδιορίσουμε τη μετατόπισή του *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα* Δt *γύρω από αυτή τη στιγμή*. Η ταχύτητα που προκύπτει ονομάζεται **στιγμιαία ταχύτητα**. Για **κίνηση σε ευθεία γραμμή**, η στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\upsilon(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \text{ Δt πολύ μικρό γύρω από τη χρονική στιγμή t}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, όπως και η μέση διανυσματική ταχύτητα, και η κατεύθυνσή της συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης.

Παράδειγμα

Δύο αδέλφια, ο Χρίστος και ο Σοφοκλής, πηγαίνουν στο σχολείο ακολουθώντας μια ευθύγραμμη λεωφόρο μήκους $2{,}5\ \text{km}$. Ο Χρίστος χρησιμοποιεί το σχολικό λεωφορείο, ενώ ο Σοφοκλής πηγαίνει πεζός. Τα αδέλφια φθάνουν στο σχολείο 30 λεπτά μετά από την αναχώρησή τους.

Κατά τη διάρκεια της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητα του Χρίστου αλλάζει συνεχώς. Στο αρχικό τμήμα της διαδρομής η ένδειξη του ταχυμέτρου ισούται με $30\ \text{km/h}$. Για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα το λεωφορείο σταματά στα φώτα τροχαίας. Στο τελευταίο τμήμα της διαδρομής η ένδειξη μειώνεται σε $1\ \text{km/h}$, λόγω κυκλοφοριακής συμφόρησης.

Οι στιγμιαίες ταχύτητες των δύο αδελφών είναι διαφορετικές και μεταβάλλονται συνεχώς. Επειδή όμως διανύουν το ίδιο μήκος διαδρομής στο ίδιο χρονικό διάστημα, έχουν την ίδια μέση αριθμητική ταχύτητα:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{2{,}5\ \text{km}}{30\ \text{min}} = \frac{2{,}5\ \text{km}}{30\ \text{min}} \cdot \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}} = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Η ένδειξη του ταχυμέτρου ενός αυτοκινήτου καταγράφει τη στιγμιαία ταχύτητα. Το όριο ταχύτητας σε έναν αυτοκινητόδρομο καθορίζει τη μέγιστη επιτρεπόμενη στιγμιαία ταχύτητα.

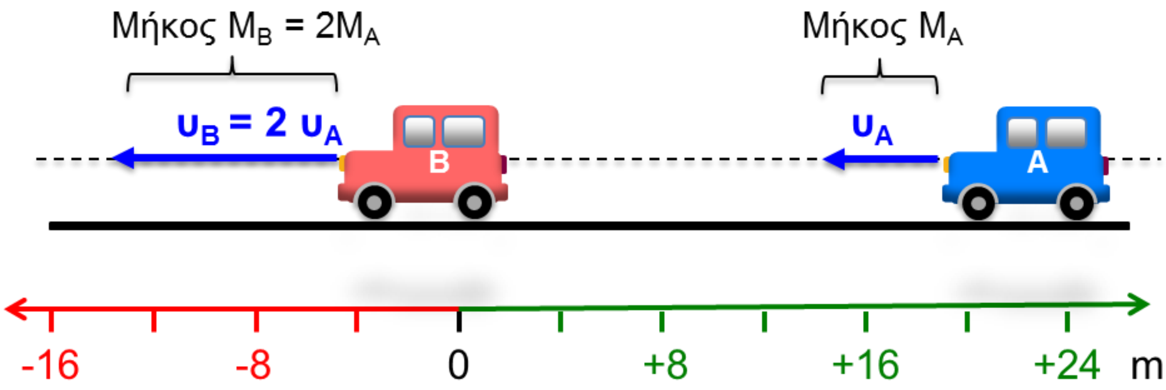
Αναπαράσταση Ταχυτήτων με Βέλη

Το μήκος του βέλος ενός διανύσματος θέσης αναπαριστά την απόσταση του σημείου της θέσης από το σημείο αναφοράς, στην κλίμακα του σχήματος. Για παράδειγμα, σε κλίμακα $1:100$ η θέση $+1\,\text{m}$ σημειώνεται στο σχήμα σε απόσταση $1\,\text{cm}$ από το σημείο αναφοράς, προς τη θετική κατεύθυνση, και το βέλος της θέσης σχεδιάζεται με μήκος $1\,\text{cm}$. Όμοια, το μήκος του βέλους ενός διανύσματος μετατόπισης αναπαριστά με το μέτρο της μετατόπισης, δηλαδή με την απόσταση μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης. Μια μετατόπιση $+2\,\text{m}$ θα αναπαρίσταται σε σχήμα κλίμακας $1:100$ από ένα βέλος μήκους $2\,\text{cm}$.

Στην αναπαράσταση ενός διανύσματος ταχύτητας αντιστοιχίζουμε *ένα συγκεκριμένο μήκος βέλους σε ένα συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας*. Για παράδειγμα, έστω ότι αποφασίζουμε να αναπαραστήσουμε μια ταχύτητα μέτρου $1\,\text{m/s}$ με ένα βέλος μήκους $1\,\text{cm}$. Αυτή η αντιστοιχία καθορίζει και την αναπαράσταση όλων των ταχυτήτων του ίδιου σχήματος: μια ταχύτητα με μέτρο $3\,\text{m/s}$ θα απεικονίζεται από βέλος μήκους $3\,\text{cm}$ κ.ο.κ.

Η κατεύθυνση του βέλους της ταχύτητας συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης. Συνεπώς, το βέλος της θετικής ταχύτητας είναι στραμμένο προς την κατεύθυνση που αυξάνονται οι τιμές της θέσης.

Στην Εικόνα 2-7 σχεδιάζονται οι στιγμιαίες ταχύτητες δύο αυτοκινήτων Α και Β που κινούνται σε ευθεία γραμμή. Η θετική κατεύθυνση είναι προς τα δεξιά και τα αυτοκίνητα κινούνται προς την αρνητική κατεύθυνση. Το αυτοκίνητο Α έχει ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από το αυτοκίνητο Β. Τα βέλη των ταχυτήτων υ_A και υ_B είναι στραμμένα προς την αρνητική κατεύθυνση. Ζωγραφίζουμε το βέλος της ταχύτητας υ_A με κάποιο αυθαίρετο μήκος $\mathrm{M_A}$ και το βέλος της ταχύτητας υ_B με διπλάσιο μήκος, $\mathrm{M}_B = 2\,\mathrm{M_A}$.



Εικόνα 2-7: Το βέλος που αναπαριστά ένα διάνυσμα ταχύτητας έχει μήκος ανάλογο με το μέτρο της ταχύτητας.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Έστω ότι θέλετε να προσδιορίσετε την ταχύτητα με την οποία κινείται ένα σώμα επάνω σε μια ευθεία. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Ερώτηση	**Σωστό/Λάθος**
Η μέση αριθμητική ταχύτητα εξαρτάται από τη φορά της κίνησης	
Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι πάντα ίση με μηδέν, όταν η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν	
Δύο σώματα που ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και καταλήγουν ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο έχουν πάντα την ίδια μέση αριθμητική ταχύτητα	
Όταν η θέση ενός σώματος είναι θετική, η μέση διανυσματική ταχύτητά του είναι πάντα θετική	
Όταν ένα σώμα κινείται προς την κατεύθυνση στην οποία αυξάνονται οι τιμές των θέσεων, η μέση διανυσματική ταχύτητά του είναι πάντα θετική	
Το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας είναι πάντα ίσο με μηδέν, όταν η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν	
Δύο σώματα που ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και καταλήγουν ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο έχουν πάντα την ίδια διανυσματική ταχύτητα	

Ασκήσεις

1. Η Πελαγία διανύει απόσταση $4\ \text{km}$ με το ποδήλατό της σε $20\ \text{min}$. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητά της σε km/h και σε m/s.

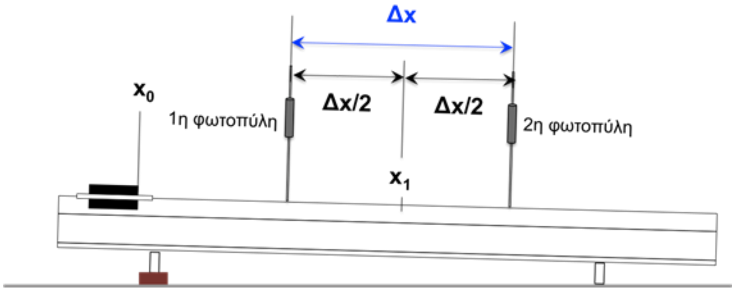
2. Ο πρωταθλητής του βάδην Γιοάν Ντενίζ, έκανε παγκόσμιο ρεκόρ στην απόσταση $50\ \text{km}$. Διάνυσε το πρώτο μισό της διαδρομής σε 1 ώρα 40 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα, και το δεύτερο μισό σε 1 ώρα, 52 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του πρωταθλητή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

3. Η Γη διαγράφει προσεγγιστικά κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με ακτίνα $R = 150\,000\,000\ \text{km}$. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα της Γης κατά την κίνησή της γύρω από τον Ήλιο.

4. Στο μυθιστόρημα του Ιουλίου Βέρν «Ο γύρος του κόσμου σε 80 μέρες», ο Φιλέας Φόγκ αναχωρεί από τη Μεταρρυθμιστική Λέσχη του Λονδίνου και επιστρέφει στο ίδιο σημείο μετά από 80 μέρες ακριβώς. Υποθέστε ότι η τροχιά του κ. Φόγκ αντιστοιχεί σε ένα μέγιστο κύκλο πάνω στην επιφάνεια της Γής. Η ακτίνα R του κύκλου είναι η ακτίνα της Γής, και δίνεται στον Πίνακα 1-1. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητά του πρωταγωνιστή.

5. Ένας κολυμβητής διασχίζει μια πισίνα μήκους $50{,}0\ \text{m}$ σε $55\ \text{s}$ και επιστρέφει στην αφετηρία σε $60\ \text{s}$. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του κολυμβητή στα δύο τμήματα της διαδρομής ξεχωριστά, και σε ολόκληρη τη διαδρομή.

6. Μια ομάδα μαθητών χρησιμοποίησε τη διπλανή πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό της ταχύτητας με την οποία περνά το αμαξάκι από κάποιο συγκεκριμένο σημείο ανάμεσα στις δύο φωτοπύλες.



Σε διαδοχικά πειράματα, οι μαθητές μετακινούσαν τις φωτοπύλες φροντίζοντας ώστε να ισαπέχουν συνεχώς από ένα συγκεκριμένο σημείο x_1, και κατέγραφαν την απόσταση Δx μεταξύ των φωτοπυλών. Για κάθε απόσταση Δx οι μαθητές άφηναν το αμαξάκι να κινηθεί πάντοτε από την ίδια θέση x_0, με μηδενική αρχική ταχύτητα, και κατέγραφαν την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt της κίνησης του αμαξιού μεταξύ των φωτοπυλών.

Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται τα πειραματικά δεδομένα για την κίνηση του αμαξιού.

Α/Α	Απόσταση μεταξύ δύο φωτοπυλών (m)	Χρόνος (s)	Μέση Ταχύτητα (m/s)
1	0,500	0,8370	
2	0,400	0,6485	
3	0,300	0,4527	
4	0,200	0,2995	
5	0,100	0,1445	
6	0,0350	0,0499	

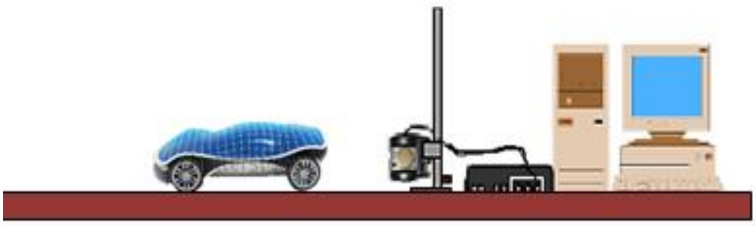
Α. Να συμπληρώσετε την τελευταία στήλη του πίνακα, χρησιμοποιώντας το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

Β. Να εκτιμήσετε την ταχύτητα του αμαξιού όταν περνά από το συγκεκριμένο σημείο x_1.

7. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ένα ευθύγραμμο δρόμο μήκους s από μια πόλη Α σε μια πόλη Β, διατηρώντας την ίδια φορά κίνησης. Έστω ότι στο πρώτο μισό της διαδρομής το αυτοκίνητο κινείται με μέση αριθμητική ταχύτητα υ_1, και στο δεύτερο μισό με μέση αριθμητική ταχύτητα υ_2. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου για τη συνολική διαδρομή. Να εκφράσετε το αποτέλεσμα παραμετρικά, χρησιμοποιώντας τα μεγέθη υ_1 και υ_2.

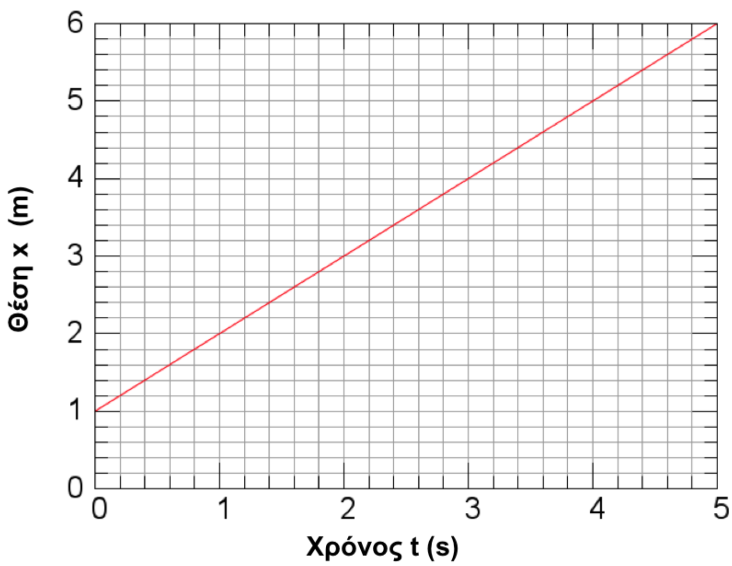
Κίνηση με Σταθερή Ταχύτητα

Ένας μαθητής πειραματίζεται με ένα ένα ηλιακό μοντέλο αυτοκινήτου. Στο εγχειρίδιο χρήσης αναφέρεται ότι το μοντέλο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Για να επιβεβαιώσει αυτή την προδιαγραφή, ο μαθητής χρησιμοποιεί την πειραματική διάταξη της Εικόνας 2-8, που περιλαμβάνει έναν αισθητήρα κίνησης και έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.



Εικόνα 2-8: Πειραματική διάταξη για τη μελέτη της κίνησης του ηλιακού αυτοκινήτου - μοντέλου.

Ο αισθητήρας καταγράφει τη θέση του αυτοκινήτου σαν συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιώντας ηχητικούς παλμούς. Στην οθόνη του υπολογιστή προκύπτει η **γραφική παράσταση θέσης – χρόνου** της Εικόνας 2-9.



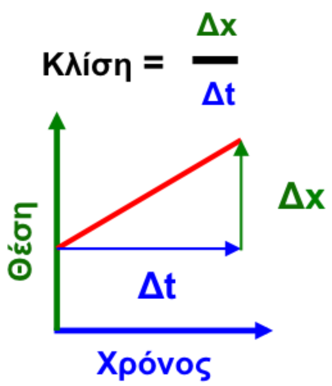
Εικόνα 2-9: Γραφική παράσταση της θέσης του αυτοκινήτου της πειραματικής διάταξης που φαίνεται στην Εικόνα 2-8 σαν συνάρτηση του χρόνου.

Η γραφική παράσταση της Εικόνας 2-9 είναι ευθεία γραμμή και το αυτοκίνητο *μετατοπίζεται κατά το ίδιο διάστημα* Δx *σε ίσα χρονικά διαστήματα* Δt.

Άσκηση: Για να επιβεβαιώσετε την πιο πάνω παρατήρηση, να υπολογίσετε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στα χρονικά διαστήματα $0\ \text{s} - 1\ \text{s}$, $2{,}6\ \text{s} - 3{,}6\ \text{s}$, $3{,}4\ \text{s} - 4{,}4\ \text{s}$.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η *μετατόπιση είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα,* $\Delta x = k\,\Delta t$. Αν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε, κ.ο.κ. το χρονικό διάστημα, αντίστοιχα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.ο.κ. η μετατόπιση.

Άσκηση: Για να επιβεβαιώσετε αυτή την παρατήρηση, να υπολογίσετε τη μετατόπιση στα χρονικά διαστήματα $0\ \text{s} - 1\ \text{s}$, $1{,}8\ \text{s} - 3{,}6\ \text{s}$, $2\ \text{s} - 5\ \text{s}$.



Εικόνα 2-10: Η κλίση της ευθείας στη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου ισούται με το πηλίκο Δx/Δt.

Όταν το πηλίκο $\Delta x/\Delta t$ είναι σταθερό για αυθαίρετα χρονικά διαστήματα, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι αμετάβλητη. Συνεπώς, και η στιγμιαία ταχύτητα υ είναι σταθερή και ίση με τη σταθερά αναλογίας k,

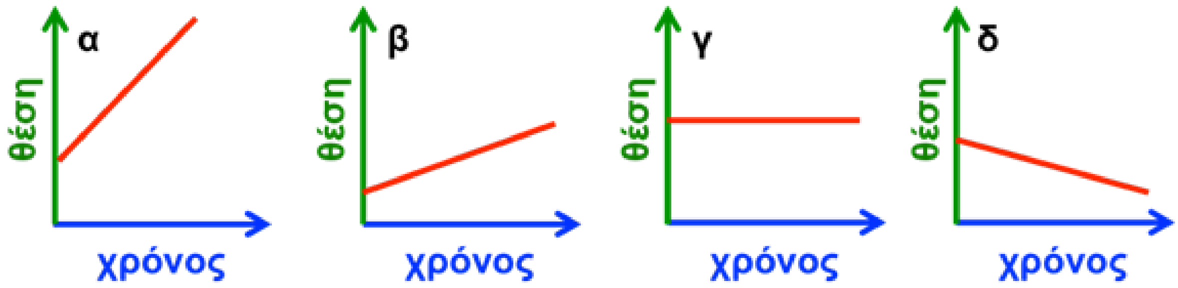
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = k = \upsilon$$

Μια κίνηση με σταθερή στιγμιαία ταχύτητα ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**.

Όπως προκύπτει από την Εικόνα 2-10, *η κλίση της ευθείας στη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου ισούται με τη σταθερή ταχύτητα* της κίνησης.

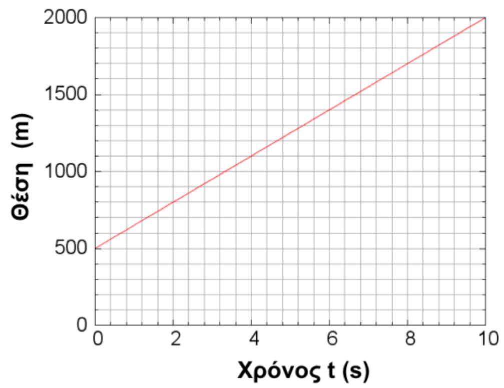
$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon$$

Η κλίση της ευθείας θέσης – χρόνου δίνει συνοπτικές πληροφορίες για την κίνηση. Όσο πιο απότομη είναι η κλίση, τόσο πιο γρήγορα κινείται το αντικείμενο. Όταν η κλίση είναι μηδενική (οριζόντια ευθεία), το σώμα είναι ακίνητο. Όταν η κλίση είναι αρνητική, το σώμα κινείται με αρνητική ταχύτητα. Η Εικόνα 2-11 περιλαμβάνει παραδείγματα κινήσεων με διαφορετικές ταχύτητες.



Εικόνα 2-11: Η κλίση της ευθείας θέσης – χρόνου δίνει πληροφορίες για την κίνηση: (α) μεγάλη θετική κλίση αντιστοιχεί σε μεγάλη θετική ταχύτητα, (β) μικρή θετική κλίση σε μικρή θετική ταχύτητα, (γ) μηδενική κλίση (οριζόντια ευθεία) σε μηδενική ταχύτητα, (δ) αρνητική κλίση σε αρνητική ταχύτητα.

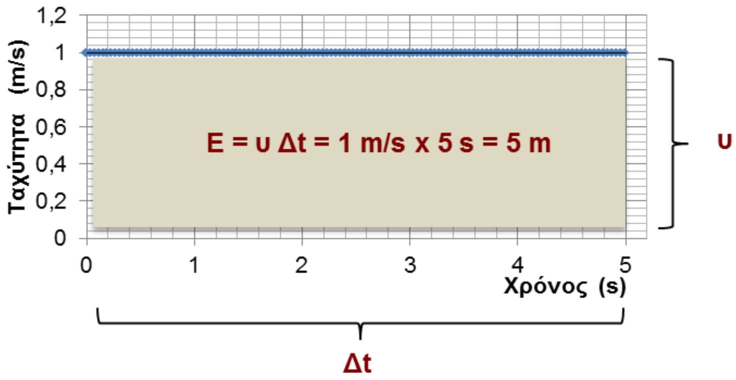
Άσκηση: Το 2007 η υπερταχεία της διαδρομής Παρίσι – Στρασβούργο έσπασε το ρεκόρ ταχύτητας συμβατικών τρένων. Σε ένα ευθύγραμμο τμήμα της διαδρομής της κινούνταν συνεχώς με σταθερή ταχύτητα κοντά στο ρεκόρ. Η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου της υπερταχείας σε αυτό το τμήμα φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του τρένου και να τη μετατρέψετε σε km/h.



Ερώτηση: Μια ομάδα μέτρησε στο εργαστήριο τις τιμές της θέσης ενός μικρού οχήματος σε διάφορες χρονικές στιγμές. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στον διπλανό πίνακα. Μπορούν από τα δεδομένα του πίνακα οι μαθητές να συμπεράνουν ότι το αυτοκινητάκι κινείται με σταθερή ταχύτητα σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του;

Χρονική στιγμή t (s)	Θέση x (cm)
0	0
4	20
8	40
12	60
16	80

Η **γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου** που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου της Εικόνας 2-8 φαίνεται στην Εικόνα 2-12.



Εικόνα 2-12: Το σκιασμένο εμβαδόν στην ευθεία ταχύτητας-χρόνου ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

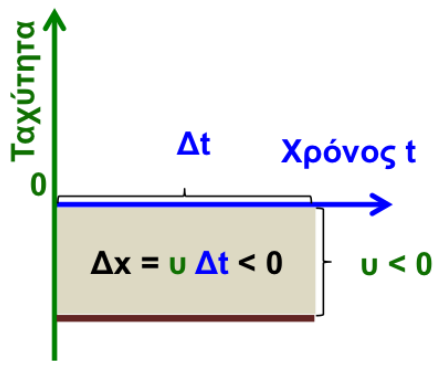
Το σκιασμένο εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας - χρόνου και στον οριζόντιο άξονα ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt. **Το εμβαδόν αυτό έχει μονάδες μήκους** (m).

Εμβαδόν=$\upsilon\,\Delta t = \Delta x$

Όπως θα δείξουμε αργότερα, αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό διότι *έχει γενική ισχύ και για κινήσεις με μεταβλητή ταχύτητα.*

Άσκηση: Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του.

Για ένα σώμα με σταθερή *αρνητική* ταχύτητα, η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου έχει τη μορφή της Εικόνας 2-13.



Εικόνα 2-13: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για κίνηση με σταθερή αρνητική ταχύτητα. Η συνολική μετατόπιση στο διάστημα Δt είναι αρνητική. Το εμβαδόν ανάμεσα στην ευθεία της ταχύτητας και στον χρονικό άξονα θεωρείται αρνητικό, και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Το εμβαδόν αυτό ισούται με τη μετατόπιση, όπως και στην περίπτωση της θετικής ταχύτητας.

Για κάθε τμήμα της καμπύλης ταχύτητας – χρόνου που βρίσκεται κάτω από τον άξονα του χρόνου, το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας θεωρείται αρνητικό. Με αυτή τη σύμβαση, το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Εξίσωση Θέσης – Χρόνου στην Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_0 και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0$, το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x = x - x_0$. Από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει η παρακάτω εξίσωση θέσης - χρόνου:

$$\Delta x = \upsilon \Delta t \Rightarrow x - x_0 = \upsilon\left(t - t_0\right) \Rightarrow x = x_0 + \upsilon\left(t - t_0\right)$$

Εξίσωση θέσης – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$x = x_0 + \upsilon\left(t - t_0\right)$$

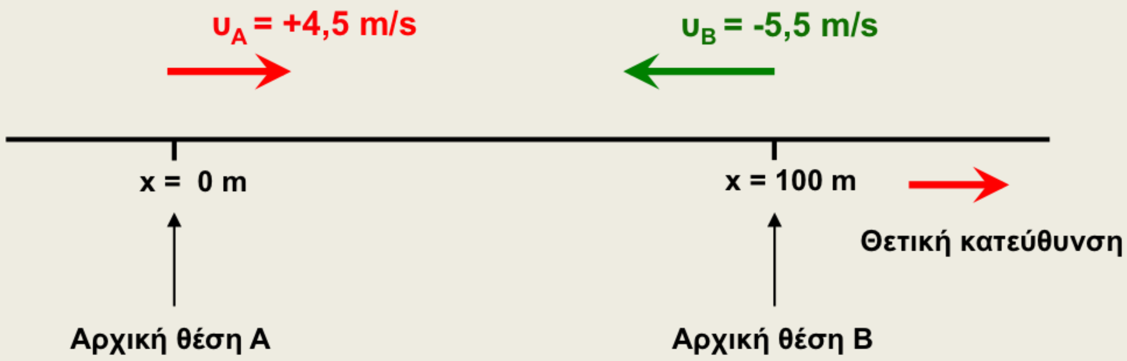
Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει τη θέση ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ, σαν συνάρτηση του χρόνου. Αν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$x = \upsilon\, t$$

Παράδειγμα: Δύο μικροί αθλητές Α και Β ξεκινούν να τρέχουν σε μια ευθύγραμμη διαδρομή. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκονται σε απόσταση $100\ \text{m}$ μεταξύ τους, και αρχίζουν να τρέχουν ο ένας προς τον άλλο με σταθερές ταχύτητες μέτρου $\upsilon_A = 4,5\ \text{m/s}$ (αθλητής Α) και $\upsilon_B = 5,5\ \text{m/s}$ (αθλητής Β).

Α. Να σχεδιάσετε την ευθεία της διαδρομής, να διαλέξετε το σημείο αναφοράς και τη θετική κατεύθυνση, και να τοποθετήσετε τους αθλητές.

Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο αναφοράς στην αρχική θέση του Α και τη θετική κατεύθυνση από τον Α προς τον Β. Με αυτή τη σύμβαση, η αρχική θέση του Α ισούται με $0\ \text{m}$ και η αρχική θέση του Β ισούται με $100\ \text{m}$. Η ταχύτητα του Α είναι θετική και η ταχύτητα του Β είναι αρνητική.

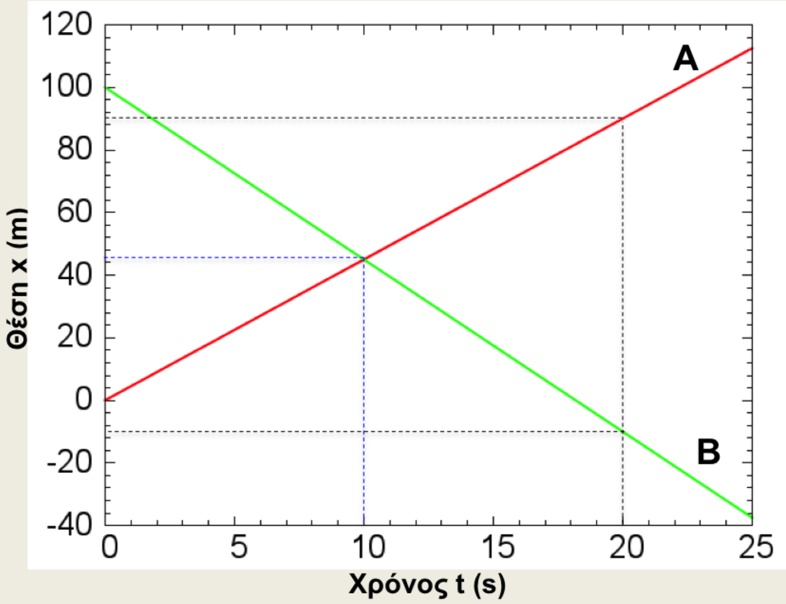


Β. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου των δύο αθλητών στο ίδιο διάγραμμα για το διάστημα $0\ \text{s} - 25\ \text{s}$. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις, να προσδιορίσετε σε ποιά χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι αθλητές, και σε ποιο σημείο της διαδρομής.

Οι γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου των δύο αθλητών είναι ευθείες γραμμές. Ο αθλητής Α ξεκινά από τη θέση $x=0\ \text{m}$ τη χρονική στιγμή $t=0\ \text{s}$. Μετά από $20\ \text{s}$, ο αθλητής βρίσκεται στη θέση $x=90\ \text{m}$. Ενώνοντας τα σημεία $(0\ \text{s},\ 0\ \text{m})$ και $(20\ \text{s},\ +90\ \text{m})$, προκύπτει η ευθεία θέσης – χρόνου του Α με κλίση $+4,5\ \text{m/s}$.

Ο αθλητής Β ξεκινά από τη θέση $x=+100\ \text{m}$. Μετά από $20\ \text{s}$ ο αθλητής βρίσκεται στη θέση $100\ \text{m} - 20\times 5,5\ \text{m} = -10\ \text{m}$. Ενώνοντας τα σημεία $(0\ \text{s},\ +100\ \text{m})$ και $(20\ \text{s},\ -10\ \text{m})$, προκύπτει η ευθεία θέσης – χρόνου του Β. Η κλίση της ευθείας είναι $-5,5\ \text{m/s}$.

Οι δύο ευθείες που προκύπτουν φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι οι αθλητές θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t = 10$ s στη θέση $x = 45$ m.

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο συνάντησης των δύο αθλητών χρησιμοποιώντας τις κινηματικές εξισώσεις.

Ο αθλητής Α ξεκινά από αρχική θέση 0 m τη χρονική στιγμή 0 s. Η εξίσωση κίνησης του αθλητή Α είναι:

$$x_A = \upsilon_A t$$

Ο αθλητής Β ξεκινά από αρχική θέση $x_{0B} = +100$ m τη χρονική στιγμή 0 s. Η εξίσωση κίνησης του αθλητή Β είναι:

$$x_B = x_{0B} + \upsilon_B t$$

Οι δύο αθλητές συναντώνται όταν οι θέσεις τους ισούνται. Άρα:

$$x_A = x_B \Rightarrow \upsilon_A t = x_{0B} + \upsilon_B t \Rightarrow t = \frac{x_{0B}}{\upsilon_A - \upsilon_B} = \frac{100}{4{,}5-(-5{,}5)}\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 10\text{ s}$$

Εκείνη τη στιγμή, η θέση των αθλητών είναι:

$$x_A = x_B = \upsilon_A t = 4{,}5 \times 10 \frac{\text{m}}{s}\text{s} = 45\text{ m}$$

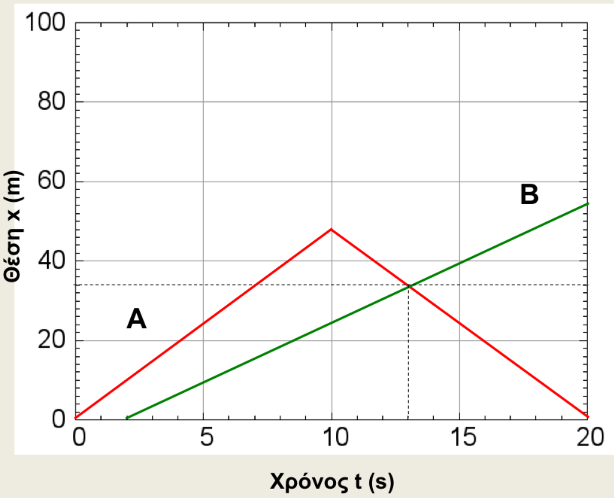
Παρατηρούμε ότι η χρήση γραφικών παραστάσεων και εξισώσεων κίνησης αποτελούν δύο εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων κίνησης.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι εξισώσεις κίνησης ήταν ενδεχομένως η ευκολότερη μέθοδος επίλυσης. Στο επόμενο παράδειγμα, η χρήση γραφικών παραστάσεων παρέχει ένα πιο εύκολο τρόπο επίλυσης προβλημάτων κίνησης:

Παράδειγμα: Οι δύο μικροί αθλητές Α και Β ξεκινούν να τρέχουν από το ίδιο σημείο και προς την ίδια κατεύθυνση. Ο αθλητής Α ξεκινά τη στιγμή 0 s και τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $5\ \mathrm{m/s}$. Μετά από $10\ \mathrm{s}$ αντιστρέφει τη φορά κίνησής του και επιστρέφει στην αφετηρία με σταθερή ταχύτητα μέτρου $5\ \mathrm{m/s}$. Ο αθλητής Β ξεκινά μετά από $2\ \mathrm{s}$ και τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $3\ \mathrm{m/s}$. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου, να προσδιορίσετε ποιά χρονική στιγμή και σε ποιό σημείο θα συναντηθούν οι δύο αθλητές.

Λύση:
Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς την αρχική θέση των δύο αθλητών, και ως θετική την κατεύθυνση προς την οποία αρχίζουν να τρέχουν. Η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου του αθλητή Α είναι ευθεία που ξεκινά από τη θέση $x = 0\ \mathrm{m}$ τη στιγμή $t = 0\ \mathrm{s}$ και έχει θετική κλίση ίση με $+5\ \mathrm{m/s}$ μέχρι τη στιγμή $t = 10\ \mathrm{s}$. Στο διάστημα $10\ \mathrm{s} - 20\ \mathrm{s}$ η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου του Α έχει αρνητική κλίση $-5\ \mathrm{m/s}$, επειδή η ταχύτητά του αντιστρέφεται.

Η γραφική παράσταση του αθλητή Β είναι ευθεία, που ξεκινά τη στιγμή $t = 2\ \mathrm{s}$ και έχει συνεχώς θετική κλίση $+3\ \mathrm{m/s}$. Οι δύο γραφικές παραστάσεις φαίνονται στην πιο κάτω εικόνα.



Από τις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι οι δύο αθλητές θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t = 13$ s στη θέση $x = 34$ m. Ο αθλητής Α εκείνη τη στιγμή έχει αντιστρέψει την κίνησή του και επιστρέφει στην αφετηρία.

Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης, αλλά η διαδικασία αυτή είναι πιο χρονοβόρα. Σας προτείνουμε να το επιβεβαιώσετε. Προβλήματα που περιλαμβάνουν απότομες αλλαγές ταχύτητας απαιτούν συνδυασμό εξισώσεων κίνησης και συνήθως επιλύονται ευκολότερα με γραφικές παραστάσεις.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Ερώτηση	Σωστό/Λάθος
Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου ενός σώματος είναι πάντα αρνητική όταν το μέτρο της θέσης ελαττώνεται	
Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου ενός σώματος είναι πάντα θετική, όταν το μέτρο της θέσης αυξάνεται	

Ασκήσεις

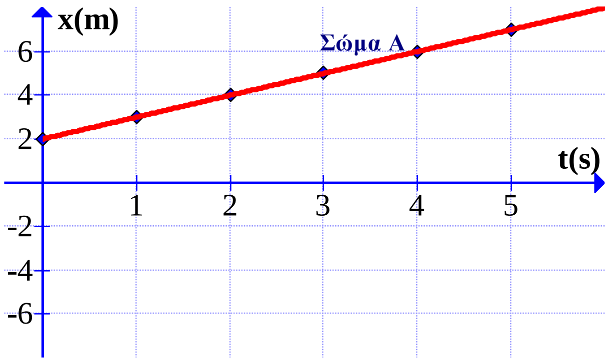
1. Δύο φορτηγά Α και Β, που βρίσκονται σε απόσταση $100\ \text{m}$ μεταξύ τους, αρχίζουν να κινούνται το ένα προς το άλλο κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου με σταθερές ταχύτητες μέτρου $1\ \text{m/s}$. Την ίδια χρονική στιγμή, ένα πουλί ξεκινάει από το φορτηγό Α και κινείται προς το φορτηγό Β. Μέχρι τη στιγμή της συνάντησης των δύο φορτηγών το πουλί πηγαινοέρχεται διαρκώς ανάμεσά τους με μέση αριθμητική ταχύτητα $10\ \text{m/s}$, αντιστρέφοντας την πορεία του κάθε φορά που συναντά ένα φορτηγό.

Α. Ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν τα φορτηγά;

Β. Ποια είναι η συνολική απόσταση που διανύει το πουλί;

2. Ένας εξερευνητής διασχίζει ένα στενό ευθύγραμμο μονοπάτι στη ζούγκλα. Κάποια στιγμή τον εντοπίζει ένα λιοντάρι που βρίσκεται σε απόσταση $150\ \text{m}$ μακριά, και αρχίζει να τον κυνηγά. Ο εξερευνητής τρέχει με ταχύτητα $5{,}0\ \text{m/s}$ και το λιοντάρι τον πλησιάζει με ταχύτητα $12{,}5\ \text{m/s}$. Σε απόσταση $105\ \text{m}$ από τον εξερευνητή βρίσκεται ένα καταφύγιο. Να διερευνήσετε αν ο εξερευνητής θα προλάβει να διασωθεί;

3. Στη διπλανή εικόνα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου ενός σώματος Α, που κινείται πάνω σε μια ευθεία.



Α. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος. Ποιά είναι η αρχική του θέση και πόση είναι η ταχύτητά του;

Β. Να χαράξετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου για τα εξής παραδείγματα κίνησης:

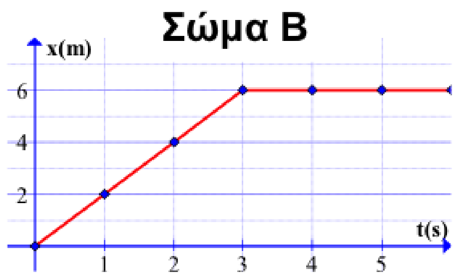
α. Ένα σώμα Β αρχίζει από τη θέση $x = 0$ και κινείται με ίση ταχύτητα με το σώμα Α.

β. Ένα σώμα Γ αρχίζει από τη θέση $x = 0$ και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα με το σώμα Α.

γ. Ένα σώμα Δ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 2\ \text{s}$ από τη θέση $x = 2\ \text{m}$. Κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το σώμα Α, αλλά με διπλάσιο μέτρο ταχύτητας.

δ. Ένα σώμα Ε ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0\ \text{s}$ από τη θέση $x = 0$. Κινείται για $1\ \text{s}$ με ταχύτητα $-4\ \text{m/s}$. Στη συνέχεια παραμένει ακίνητο για $2\ \text{s}$, και μετά κινείται με ταχύτητα $+2\text{m/s}$.

4. Στο κάτω σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου για δύο σώματα που κινούνται σε μια ευθεία. Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα.



Α. Ποιά χρονική στιγμή βρίσκεται το σώμα Α σε απόσταση 6 m από την αφετηρία;

Β. Ποιό από τα δύο σώματα φτάνει πρώτο στη θέση $x = 4$ m;

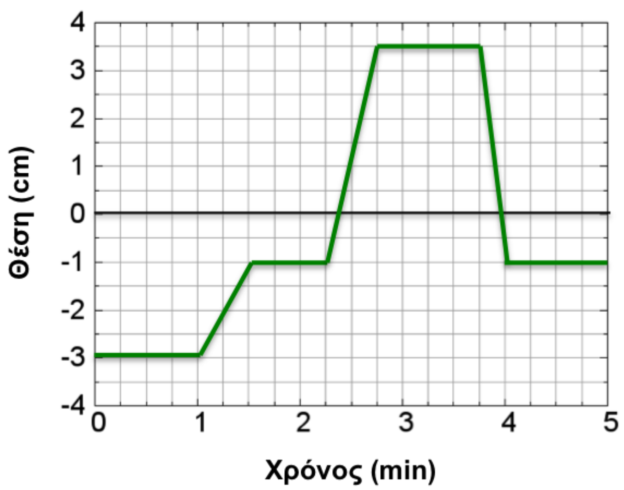
Γ. Ποιό από τα δύο σώματα χρειάζεται λιγότερο χρόνο για να απομακρυνθεί 3 m από την αφετηρία;

Δ. Ποιό σώμα βρίσκεται πιο μακριά τη χρονική στιγμή $t = 3$ s;

Ε. Ποιό σώμα κινείται με τη μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα κατά τη διάρκεια των πρώτων 5 δευτερολέπτων;

Στ. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα κάθε σώματος στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα;

5. Η διπλανή γραφική παράσταση δείχνει το διάγραμμα θέσης – χρόνου για ένα σαλιγκάρι που κινείται σε ευθεία γραμμή.



Α. Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διάνυσε το σαλιγκάρι στο χρονικό διάστημα 0 min - 5 min, και τη συνολική μετατόπισή του.

Β. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητα για το διάστημα 0 min - 5 min.

Γ. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου του σαλιγκαριού.

6. Δύο αθλητές αρχίζουν να τρέχουν ταυτόχρονα από τα άκρα μιας ευθύγραμμης διαδρομής $160\ \text{m}$, με κατεύθυνση ο ένας προς τον άλλο. Ο ένας αθλητής τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $8{,}5\ \text{m/s}$ και ο δεύτερος με σταθερή ταχύτητα μέτρου $7{,}5\ \text{m/s}$. Αφού επιλέξετε κάποιο κατάλληλο σημείο αναφοράς πάνω στην ευθεία κίνησης των δύο αθλητών και τη θετική φορά κίνησης, να:

Α. σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας – χρόνου των δύο αθλητών.

Β. σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου των δύο αθλητών. Χρησιμοποιώντας αυτά τα διαγράμματα, να προσδιορίσετε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν οι δύο αθλητές.

Γ. γράψετε τις εξισώσεις θέσης – χρόνου για τους δύο αθλητές. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο ερώτημα Β.

7. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένας δρομέας αρχίζει να τρέχει σε μια ευθύγραμμη διαδρομή μαζί με τον σκύλο του. Και οι δύο κινούνται με σταθερή ταχύτητα $6\ \text{m/s}$. Μετά από $10\ \text{s}$, ο σκύλος βλέπει ένα γάτο που είναι ακίνητος σε απόσταση $20\ \text{m}$ μπροστά του, και αρχίζει να τον κυνηγά, τρέχοντας με μεγαλύτερη ταχύτητα $8\ \text{m/s}$ στην ίδια κατεύθυνση με προηγουμένως. Ο γάτος αρχίζει να τρέχει με ταχύτητα $9\ \text{m/s}$ προς την ίδια κατεύθυνση. Ο δρομέας συνεχίζει με την ταχύτητα που είχε προηγουμένως.

Α. Να κάνετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας – χρόνου για το δρομέα, τον σκύλο και τον γάτο.

Β. Ο σκύλος συγκρατείται από τον δρομέα με μια αναπτυσσόμενη κορδέλα μέγιστου μήκους $8\ \text{m}$. Χρησιμοποιώντας τις δύο γραφικές παραστάσεις ταχύτητας – χρόνου, να υπολογίσετε μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο σκύλος θα σταματήσει να απομακρύνεται από τον άνθρωπο.

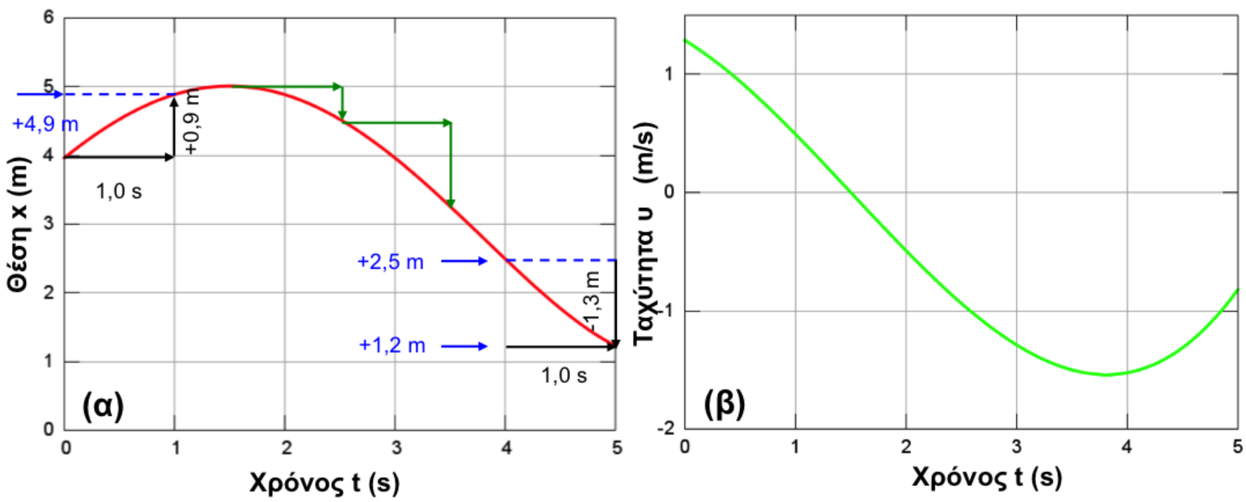
Γ. Μόλις η κορδέλα τεντωθεί στο μέγιστο μήκος της, ο σκύλος συνεχίζει να τρέχει με την ταχύτητα του δρομέα (6 m/s), και ο γάτος συνεχίζει να τρέχει με τη δική του ταχύτητα. Να υπολογίσετε από τη γραφική παράσταση ποιά θα είναι η συνολική μετατόπιση του δρομέα, του σκύλου και του γάτου, και ποιά θα είναι η τελική απόσταση σκύλου – γάτου $5\ \text{s}$ μετά από τη χρονική στιγμή που η κορδέλα απέκτησε το μέγιστο μήκος της.

Η Έννοια της Επιτάχυνσης

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος δεν παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Το μέτρο της ταχύτητας μιας μεταλλικής σφαίρας που πέφτει από κάποιο ύψος αυξάνεται με τον χρόνο. Ένα κουτί που υφίσταται μια αρχική ώθηση ξεκινά να ολισθαίνει σε οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα που ελαττώνεται συνεχώς και τελικά μηδενίζεται. Στο Κεφάλαιο 3 θα μάθουμε ότι η ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται όταν υφίσταται επίδραση από το περιβάλλον του, όπως την έλξη της βαρύτητας ή τριβή από το έδαφος.

Γραφικές παραστάσεις Θέσης – Χρόνου και Ταχύτητας – Χρόνου για Κίνηση με Μεταβαλλόμενη Ταχύτητα.

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αντιστοιχεί σε ευθεία γραμμή. Η Εικόνα 2-14 (α) απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για ένα σώμα που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, και η Εικόνα 2-14 (β) απεικονίζει την αντίστοιχη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου.



Εικόνα 2-14:(α) Γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για σώμα που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. (β) Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για την ίδια κίνηση.

Ερώτηση: Πώς μπορεί κάποιος να συμπεράνει από τη μορφή της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου ότι η ταχύτητα του σώματος δεν είναι σταθερή;

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, *η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου του σώματος δεν είναι ευθεία γραμμή*. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα *δεν μετατοπίζεται κατά το ίδιο διάστημα* Δx *σε ίσους χρόνους*, οπότε η ταχύτητα αλλάζει με το χρόνο. Για παράδειγμα, μεταξύ των στιγμών $0{,}0\ \text{s}$ και $1{,}0\ \text{s}$ το σώμα μετατοπίζεται κατά $4{,}9\ \text{m} - 4{,}0\ \text{m} = +0{,}9\ \text{m}$, ενώ μεταξύ των στιγμών $4{,}0\ \text{s}$ και $5{,}0\ \text{s}$ μετατοπίζεται κατά $+1{,}2\ \text{m} - 2{,}5\ \text{m} = -1{,}3\ \text{m}$.

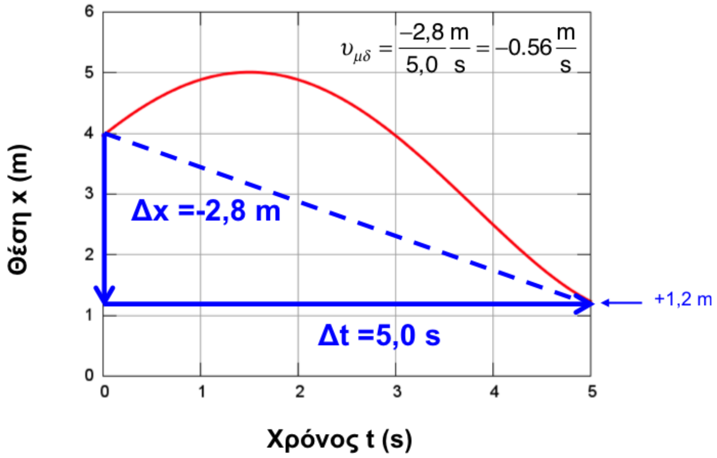
Άσκηση: Από την Εικόνα 2-14 (α), να εκτιμήσετε την μετατόπιση του σώματος στα διαστήματα $1{,}5\ \text{s} - 2{,}5\ \text{s}$ και $2{,}5\ \text{s} - 3{,}5\ \text{s}$.

Η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου απεικονίζεται στην Εικόνα 2-14 (β). Η ταχύτητα είναι αρχικά θετική, αλλά ελαττώνεται και μηδενίζεται τη στιγμή $t = 0{,}5\ \text{s}$. Στο διάστημα $0{,}5\ \text{s} - 5{,}0\ \text{s}$ είναι αρνητική.

Εκτίμηση της Μέσης Διανυσματικής Ταχύτητας από τη Γραφική Παράσταση Θέσης – Χρόνου

Από τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε τη **μέση διανυσματική ταχύτητα** σε κάποιο χρονικό διάστημα. Στην Εικόνα 2-15, το σώμα βρίσκεται στη θέση $4{,}0\ \text{m}$ τη χρονική στιγμή $0{,}0\ \text{s}$ και στη θέση $1{,}2\ \text{m}$ τη χρονική στιγμή $5{,}0\ \text{s}$. Η συνολική μετατόπιση του σώματος στο διάστημα $0{,}0\ \text{s} - 5{,}0\ \text{s}$ είναι $-2{,}8\ \text{m}$, και η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι $\upsilon_\mu = (-2{,}8\ \text{m}) / (5{,}0\ \text{s}) = -0{,}56\ \text{m/s}$. Η τιμή της μέσης διανυσματικής ταχύτητας ισούται με την κλίση του μπλε ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο έχει άκρα τα σημεία της γραφικής παράστασης για $t = 0{,}0\ \text{s}$ και $t = 5{,}0\ \text{s}$.

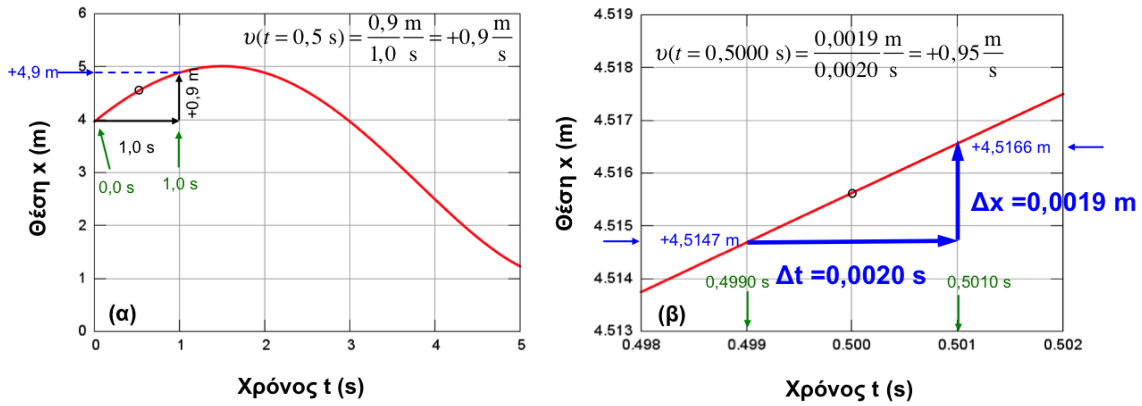
Η μέση διανυσματική ταχύτητα μεταξύ δύο στιγμών t_1, t_2 ισούται με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος, που έχει άκρα τα αντίστοιχα σημεία στην καμπύλη θέσης – χρόνου.



Εικόνα 2-15: Εκτίμηση για τη μέση διανυσματική ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 0,0 s – 5,0 s.

Εκτίμηση της Στιγμιαίας Ταχύτητας από τη Γραφική Παράσταση Θέσης – Χρόνου

Από τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου μπορούμε επίσης να εκτιμήσουμε τη **στιγμιαία ταχύτητα** σε κάποια χρονική στιγμή t. Για το σκοπό αυτό, προσδιορίζουμε τη μετατόπιση του σώματος *για ένα μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή t*. Στην Εικόνα 2-16(α) θεωρούμε το διάστημα $0,0\ \text{s} - 1,0\ \text{s}$, με μέσο τη χρονική στιγμή $0,5\ \text{s}$. Η αντίστοιχη μετατόπιση είναι ίση με $+0,9\ \text{m}$, και η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα είναι $\upsilon(t = 0,5\ \text{s}) = (0,9\ \text{m})/(1,0\ \text{s}) = 0,9\ \text{m/s}$.



Εικόνα 2- 16: (α) Εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0,5 s (σημειώνεται με τον μικρό κύκλο) από το χρονικό διάστημα 0,0 s - 1,0 s. (β) Μεγέθυνση της Εικόνας 2-16(α) γύρω από τη χρονική στιγμή t = 0,5000 s. Όταν το χρονικό διάστημα γίνεται πολύ μικρό, το αντίστοιχο τμήμα της γραφικής παράστασης προσεγγίζει ευθύγραμμο τμήμα. Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα για t=0,5000 s.

Εάν η διακριτική ικανότητα των οργάνων μέτρησης είναι υψηλή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα θα προσεγγίζει τότε καλύτερα την ακριβή τιμή της. Στην Εικόνα 2-16 (β) έχουμε κάνει μεγέθυνση της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου 2-16(α) γύρω από τη χρονική στιγμή $0,5000\ \text{s}$. Στο διάστημα $0,4990\ \text{s} - 0,5010\ \text{s}$, η μετατόπιση είναι ίση με $0,0019\ \text{m}$ και η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα γίνεται $\upsilon = (0,0019)\ \text{m}/(0,0020\ \text{s}) = 0,95\ \text{m/s}$. Από την Εικόνα 2-16(β) φαίνεται ότι η καμπύλης θέσης – χρόνου στο διάστημα $0,4980\ \text{s} - 0,5020\ \text{s}$ είναι περίπου ευθύγραμμη.

Αν η μεγέθυνση της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου γίνει πολύ μεγάλη, δηλαδή αν το χρονικό διάστημα Δt γύρω από τη στιγμή t γίνει πολύ μικρό, το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης γίνεται ευθύγραμμο και η κλίση του ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα.

Μέση Επιτάχυνση

Το μέγεθος που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η ταχύτητα ενός σώματος είναι η **επιτάχυνση**.

Εστω ότι ένα κινούμενο σώμα έχει ταχύτητες υ_1 και υ_2 σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Η μεταβολή στη στιγμιαία ταχύτητα, $\Delta\upsilon$, υπολογίζεται αφαιρώντας την αρχική ταχύτητα υ_1 από την τελική ταχύτητα υ_2. Ως **μέση επιτάχυνση** α_μ ορίζεται *το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας, $\Delta\upsilon$, προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt*

Η μέση επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος και έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\upsilon$.

$$\alpha_\mu = \frac{\text{Μεταβολή ταχύτητας}}{\text{Χρονικό διάστημα}} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

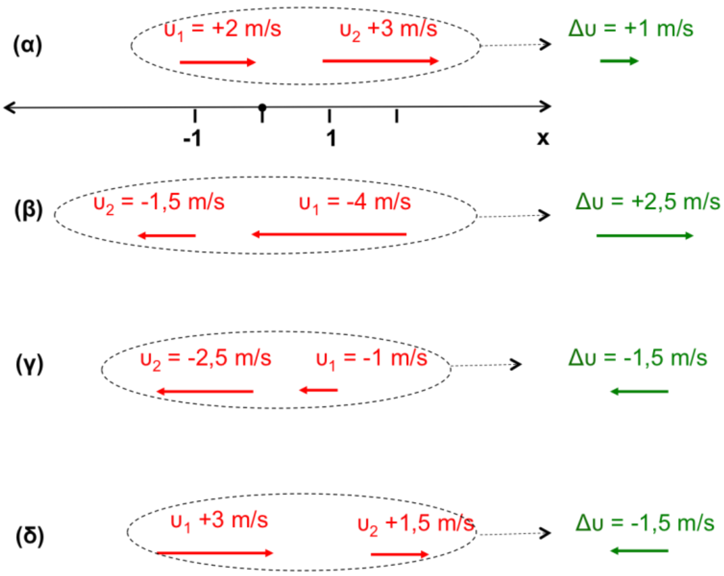
Στην ευθύγραμμη κίνηση, η διεύθυνση της επιτάχυνσης συμπίπτει με τη διεύθυνση της ευθείας κίνησης και η φορά της δηλώνεται από το πρόσημο της μεταβολής ταχύτητας

$\Delta\upsilon$. Από τον ορισμό, προκύπτει ότι η μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης στο σύστημα SI είναι το m/s^2.

Στην Εικόνα 2-17 απεικονίζονται παραδείγματα μεταβολών ταχύτητας για ένα αυτοκίνητο που κινείται σε ευθεία γραμμή. Υπενθυμίζουμε ότι τα βέλη θετικής ταχύτητας έχουν φορά προς την κατεύθυνση που αυξάνονται οι τιμές των θέσεων. Αυτές μεγαλώνουν προς τα δεξιά, όπως κοιτάμε το σχήμα. Γι αυτό και οι ταχύτητες είναι θετικές για κινήσεις προς τα δεξιά.

Η περίπτωση (α) αντιστοιχεί σε κίνηση με θετική, αυξανόμενη ταχύτητα. Η μεταβολή της ταχύτητας, $\Delta\upsilon$, και η αντίστοιχη μέση επιτάχυνση είναι θετικές. Στην περίπτωση (β) το αυτοκίνητο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και φρενάρει. Επειδή η ταχύτητα του αυτοκινήτου γίνεται λιγότερο αρνητική, η μεταβολή $\Delta\upsilon$ και η μέση επιτάχυνση είναι θετικές, όπως και στην περίπτωση (α). Στο τρίτο παράδειγμα, η ταχύτητα γίνεται όλο και πιο αρνητική, οπότε η μεταβολή στην ταχύτητα $\Delta\upsilon$ και η επιτάχυνση είναι αρνητικές. Στο τελευταίο παράδειγμα η ταχύτητα είναι θετική και ελαττώνεται. Η μεταβολή $\Delta\upsilon$ και η επιτάχυνση είναι αρνητικές.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι θετική επιτάχυνση μπορεί να σημαίνει αύξηση του μέτρου της ταχύτητας αν η ταχύτητα είναι θετική, ή ελάττωση του μέτρου της ταχύτητας αν είναι αρνητική (περιπτώσεις α, β). Αρνητική επιτάχυνση μπορεί να σημαίνει αύξηση του μέτρου της αρνητικής ταχύτητας, ή ελάττωση του μέτρου της θετικής ταχύτητας (περιπτώσεις γ, δ).

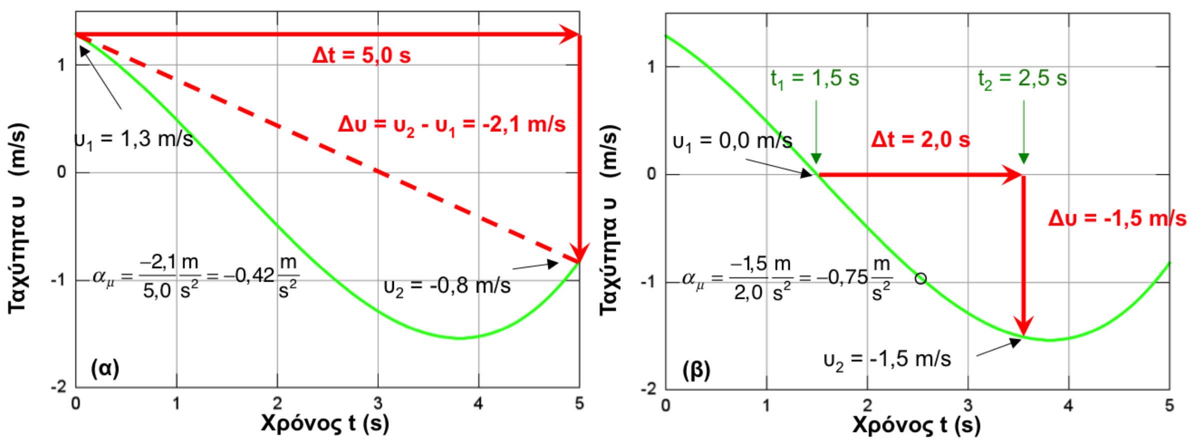


Εικόνα 2-17: Παραδείγματα μεταβολών ταχύτητας για ένα σώμα που κινείται σε ευθεία γραμμή.

Προσδιορισμός της Μέσης Επιτάχυνσης από τη Γραφική Παράσταση Ταχύτητας – Χρόνου

Η μέση επιτάχυνση μπορεί να προσδιοριστεί από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-18 (α). Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα $0{,}0\ \text{s} - 5{,}0\ \text{s}$. Τις χρονικές στιγμές $0{,}0\ \text{s}$ και $5{,}0\ \text{s}$, οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι $\upsilon_1 = +1{,}3\ \text{m/s}$ και $\upsilon_2 = -0{,}8\ \text{m/s}$. Άρα, η μεταβολή στην ταχύτητα ισούται με $-0{,}8\ \text{m/s} - 1{,}3\ \text{m/s} = -2{,}1\ \text{m/s}$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η μέση επιτάχυνση είναι $\alpha_\mu = (-2{,}1\ \text{m/s}) / (5{,}0\ \text{s}) = -0{,}42\ \text{m/s}^2$. Η μέση επιτάχυνση ισούται με την κλίση του κόκκινου ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία της γραφικής παράστασης για $t = 0{,}0\ \text{s}$ και $t = 5{,}0\ \text{s}$.

Η μέση διανυσματική επιτάχυνση μεταξύ δύο στιγμών t_1, t_2 ισούται με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος, που έχει άκρα τα αντίστοιχα σημεία στην καμπύλη ταχύτητας – χρόνου.



Εικόνα 2-18): (α) Εκτίμηση της μέσης επιτάχυνσης στο διάστημα 0,0 s – 5,0 s από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου. (β) Εκτίμηση της στιγμιαίας επιτάχυνσης τη στιγμή t = 2,5 s από τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα 1,5 s – 3,5 s.

Στιγμιαία Επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας σε κάποιο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι ένα σώμα κινήθηκε για 10 s με μέση επιτάχυνση 10 m/s^2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τελική ταχύτητα είναι κατά 100 m/s μεγαλύτερη από την αρχική. Στην πραγματικότητα, δεν γνωρίζουμε τον ακριβή τρόπο με τον οποίο αυξήθηκε η ταχύτητα στο διάστημα των 10 s. Για παράδειγμα, είναι πιθανόν η ταχύτητα να αυξήθηκε κατά 100 m/s τα πρώτα 5 s της κίνησης, και να διατηρήθηκε σταθερή στα υπόλοιπα 5 s.

Το μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας μια χρονική στιγμή είναι η **στιγμιαία επιτάχυνση**. Για να προσδιορίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση $\alpha(t)$, υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα* Δt *γύρω από τη χρονική στιγμή* t.

$$\alpha(t) = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}, \text{ για } \Delta t \text{ πολύ μικρό γύρω από τη στιγμή } t$$

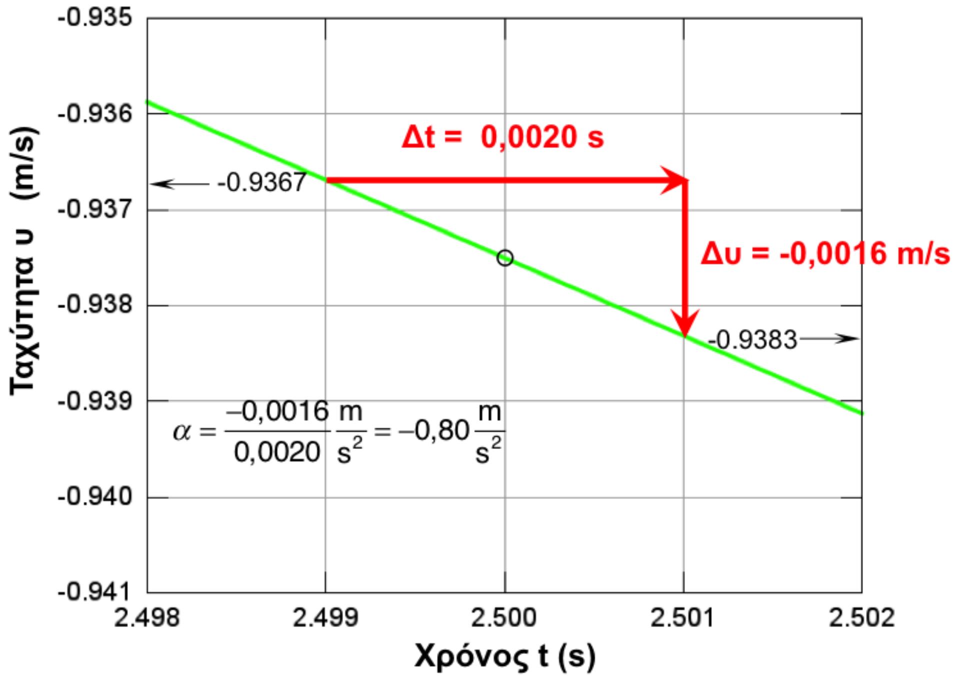
Προσδιορισμός της Στιγμιαίας Επιτάχυνσης από τη Γραφική Παράσταση Ταχύτητας – Χρόνου

Στην Εικόνα 2-18(β), θεωρούμε το χρονικό διάστημα $1{,}5\text{ s} - 3{,}5\text{ s}$ με μέσο τη στιγμή $t = 2{,}5\text{ s}$. Η αντίστοιχη μεταβολή στην ταχύτητα είναι $\Delta\upsilon = -1{,}5\text{ s}$, και η εκτίμηση για την επιτάχυνση τη στιγμή $t = 2{,}5\text{ s}$ είναι $\alpha = (-1{,}5\text{ m/s})/(2{,}0\text{ s}) = -0{,}75\text{ m/s}^2$.

Στην Εικόνα 2-19 έχουμε κάνει μεγέθυνση της γραφικής παράστασης ταχύτητας – χρόνου γύρω από τη στιγμή $t = 2{,}5000\text{ s}$. Στο διάστημα $2{,}4990\text{ s} - 2{,}5010\text{ s}$, η αντίστοιχη μεταβολή στην ταχύτητα είναι ίση με

$-0{,}0016$ m/s. Συνεπώς, η εκτίμηση για την επιτάχυνση τη στιγμή $t = 2{,}5000$ s γίνεται:

$\alpha = (-0{,}0016 \text{ m/s}) / (0{,}0020 \text{ s}) = -0{,}80 \text{ m/s}^2$.



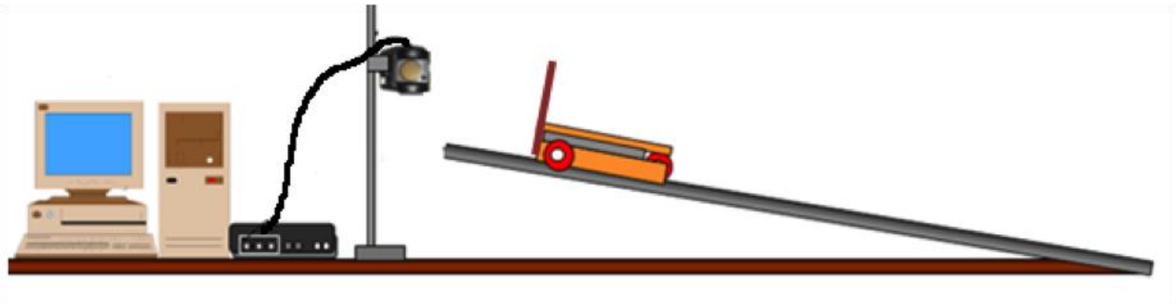
Εικόνα 2-19: Μεγέθυνση της γραφικής παράστασης ταχύτητας – χρόνου της Εικόνας 2-18(α) γύρω από τη χρονική στιγμή t = 2,500 s.

Παρατηρούμε ότι στο χρονικό διάστημα $2{,}4998 \text{ s} - 2{,}5020 \text{ s}$ το τμήμα της γραφικής παράστασης ταχύτητας – χρόνου έχει περίπου τη μορφή ευθύγραμμου τμήματος.

Αν η μεγέθυνση της καμπύλης ταχύτητας – χρόνου γίνει πολύ μεγάλη (δηλαδή το χρονικό διάστημα Δt γίνει πολύ μικρό), το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης γίνεται ευθύγραμμο και η κλίση του ισούται με τη στιγμιαία επιτάχυνση.

Κίνηση με Σταθερή Επιτάχυνση

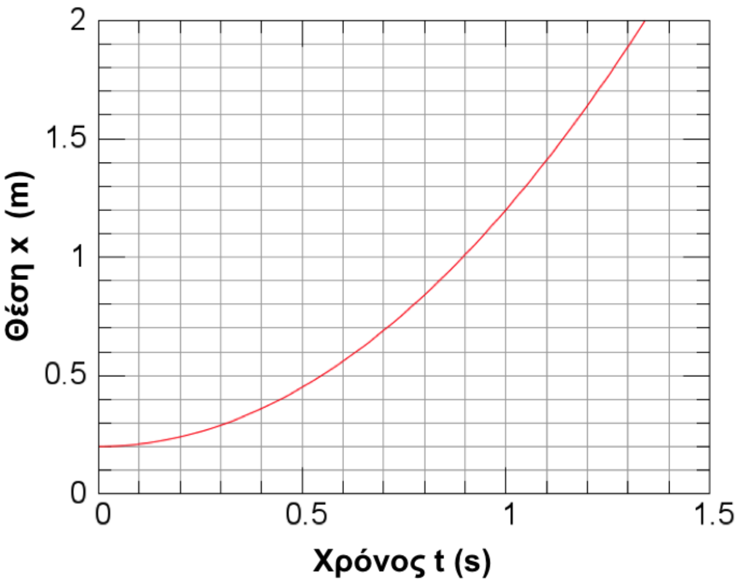
Μια σημαντική κατηγορία κινήσεων με μεταβαλλόμενη ταχύτητα περιλαμβάνει τα παραδείγματα με σταθερή επιτάχυνση.



Εικόνα 2-20: Πειραματική διάταξη μελέτης της κίνησης ενός αυτοκινήτου σε κεκλιμένο διάδρομο.

Μια ομάδα μαθητών διερευνά την κίνηση ενός μικρού οχήματος που αφήνεται σε έναν κεκλιμένο διάδρομο. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στην Εικόνα 2-20.

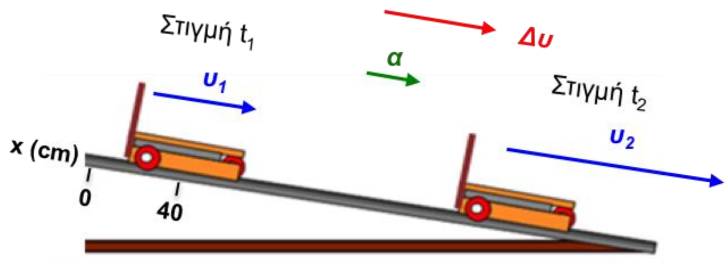
Στην Εικόνα 2-21 φαίνεται η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου του οχήματος. Αυτή είναι καμπύλη και συνεπώς η ταχύτητα μεταβάλλεται.



Εικόνα 2-21: Γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για όχημα που κινείται σε κεκλιμένο διάδρομο

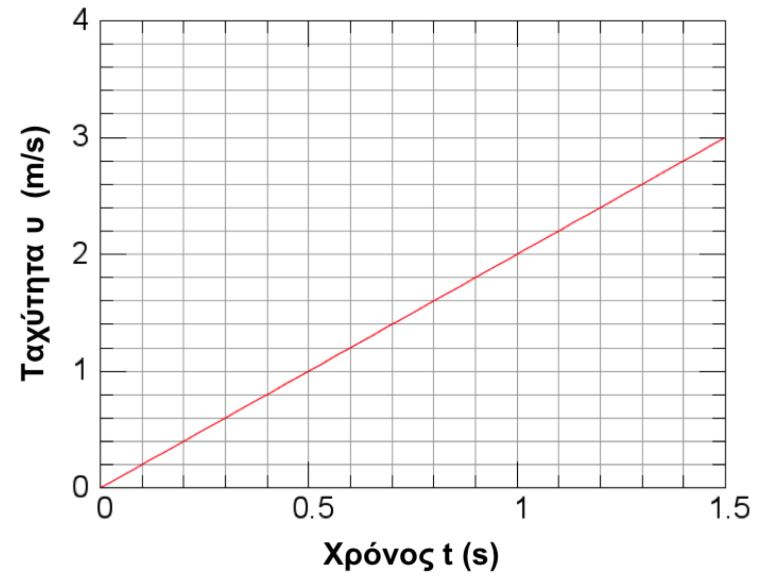
Άσκηση: Να επαληθεύσετε ότι η ταχύτητα που αντιστοιχεί στην κίνηση του αυτοκινήτου σύμφωνα με τη γραφική παράσταση της Εικόνας 2-21 μεταβάλλεται, υπολογίζοντας τη μετατόπιση για τα χρονικά διαστήματα $0{,}0\ \text{s} - 0{,}3\ \text{s}$, $0{,}7\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}$ και $1{,}0\ \text{s} - 1{,}3\ \text{s}$.

Στην Εικόνα 2-22 παριστάνονται γραφικά τα διανύσματα ταχυτήτων για δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, και της αντίστοιχης μέσης επιτάχυνσης. Η μέση επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\upsilon$. Το μήκος του βέλους της επιτάχυνσης είναι ανάλογο με το μήκος του διανύσματος $\Delta\upsilon$.



Εικόνα 2-22: Τα βέλη των ταχυτήτων σε δύο χρονικές στιγμές, και της αντίστοιχης μέσης επιτάχυνσης, για όχημα που εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση σε κεκλιμένο διάδρομο. Το κόκκινο βέλος ισούται με τη διαφορά ταχυτήτων $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$. Το βέλος της επιτάχυνσης α έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα Δυ.

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας - χρόνου του οχήματος είναι ευθεία, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 2-23. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι ανάλογη με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, $\Delta\upsilon = \gamma\,\Delta t$.



Εικόνα 2-23: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου της Εικόνας 2-20.

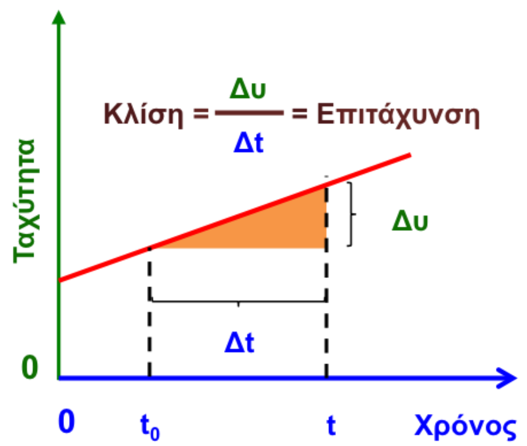
Άσκηση: Να επαληθεύσετε αυτό το συμπέρασμα από τη γραφική παράσταση της Εικόνας 2-23, υπολογίζοντας τη μεταβολή της ταχύτητας για τα χρονικά διαστήματα $0{,}0\ \text{s} - 5{,}0\ \text{s}$, $0{,}5\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}$, και $1{,}0\ \text{s} - 1{,}5\ \text{s}$.

Δεδομένου ότι το πηλίκο $\Delta\upsilon / \Delta t$ είναι σταθερό, η στιγμιαία επιτάχυνση του οχήματος είναι σταθερή και ίση με τη σταθερά αναλογίας *γ*,

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \gamma = \alpha$$

Μια τέτοια κίνηση, στην οποία η επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη**.

Αν η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι διαφορετική του μηδενός, η τεταγμένη της ευθείας ταχύτητας – χρόνου είναι διάφορη του μηδενός, όπως φαίνεται στην γραφική παράσταση της Εικόνας 2-24.



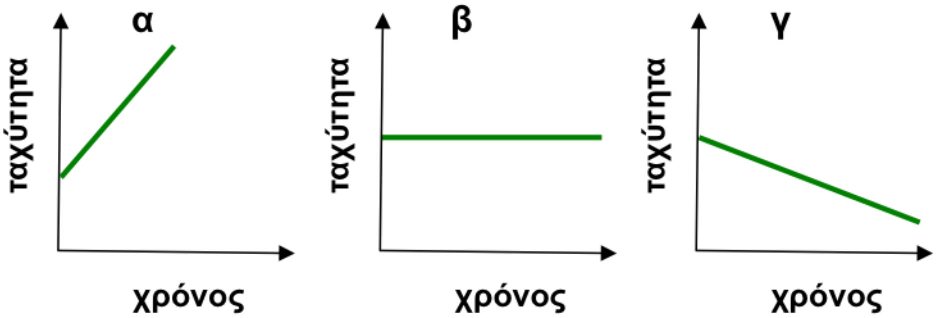
Εικόνα 2-24: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για σταθερή θετική επιτάχυνση με μη μηδενική αρχική ταχύτητα. Η κλίση της ευθείας ισούται με την επιτάχυνση.

Η τιμή της επιτάχυνσης *ισούται με την κλίση της ευθείας ταχύτητας – χρόνου* (Εικόνα 2-24):

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του οχήματος από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου της Εικόνας 2-23.

Όσο πιο μεγάλη είναι η κλίση της ευθείας στη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου, τόσο πιο μεγάλη είναι η επιτάχυνση. Όταν η κλίση είναι μηδενική (οριζόντια ευθεία), η επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν και η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή. Όταν η κλίση είναι αρνητική, το σώμα κινείται με αρνητική επιτάχυνση. Η Εικόνα 2-25 περιλαμβάνει παραδείγματα κινήσεων με διαφορετικές σταθερές επιταχύνσεις.



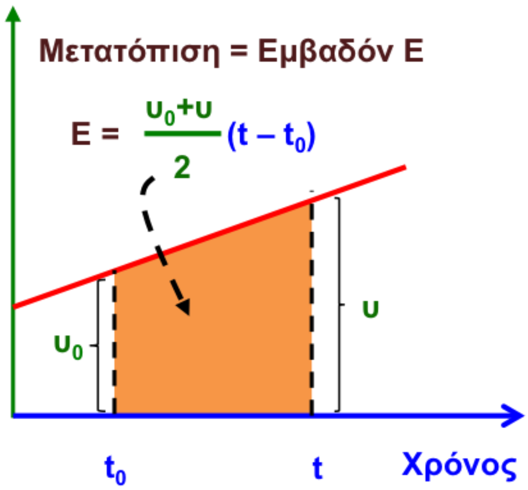
Εικόνα 2-25: Η κλίση της ευθείας ταχύτητας - χρόνου δίνει πληροφορίες για την κίνηση. (α) Θετική κλίση αντιστοιχεί σε θετική επιτάχυνση, (β) μηδενική κλίση σε μηδενική επιτάχυνση, και (γ) αρνητική κλίση σε αρνητική επιτάχυνση.

Εξισώσεις Κίνησης Ταχύτητας – Χρόνου και Θέσης – Χρόνου

Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-26. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα έχει ταχύτητα υ_0, και μια δεύτερη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα υ.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της επιτάχυνσης για να καταλήξουμε σε μια σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\upsilon = \alpha\,\Delta t \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = \alpha\left(t - t_0\right) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + \alpha\left(t - t_0\right)$$



Εικόνα 2-26: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για σταθερή θετική επιτάχυνση. Το εμβαδόν της επιφάνειας ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας – χρόνου και τον οριζόντιο άξονα (έγχρωμο τραπέζιο) ισούται με τη μετατόπιση μεταξύ των στιγμών t_0 και t.

Σχέση ταχύτητας – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\left(t - t_0\right)$$

Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα, η σχέση αποκτά την πιο απλή μορφή:

$$\upsilon = \alpha t$$

Αυτή είναι η σχέση ταχύτητας – χρόνου που αντιστοιχεί στην Εικόνα 2-23.

Στην ενότητα της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είχαμε αποδείξει ότι *το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ της ευθείας ταχύτητας – χρόνου και του άξονα χρόνου είναι ίσο με τη μετατόπιση*. Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται και για κινήσεις με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Για την κίνηση με σταθερή επιτάχυνση της Εικόνας 2-26, η επιφάνεια που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου και τον άξονα χρόνου είναι το έγχρωμο τραπέζιο.

Το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με τη μετατόπιση του οχήματος στο χρονικό διάστημα $t - t_0$:

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}(t - t_0)$$

Από αυτή την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι η μέση ταχύτητα του οχήματος, υ_μ, ισούται με τη μέση τιμή της αρχικής και τελικής ταχύτητας:

$$\boxed{\upsilon_\mu = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}}$$

Αυτή η σχέση για τη μέση ταχύτητα *ισχύει μόνο στην περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση.*

Ερώτηση: Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του οχήματος της Εικόνας 2-23, για το πρώτο 1,5 δευτερόλεπτο της κίνησης;

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ταχύτητας – χρόνου $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$, μπορούμε να απαλείψουμε την ταχύτητα υ στην εξίσωση της μετατόπισης και να εκφράσουμε τη θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου:

$$\Delta x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}(t - t_0) = \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Σχέση θέσης – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

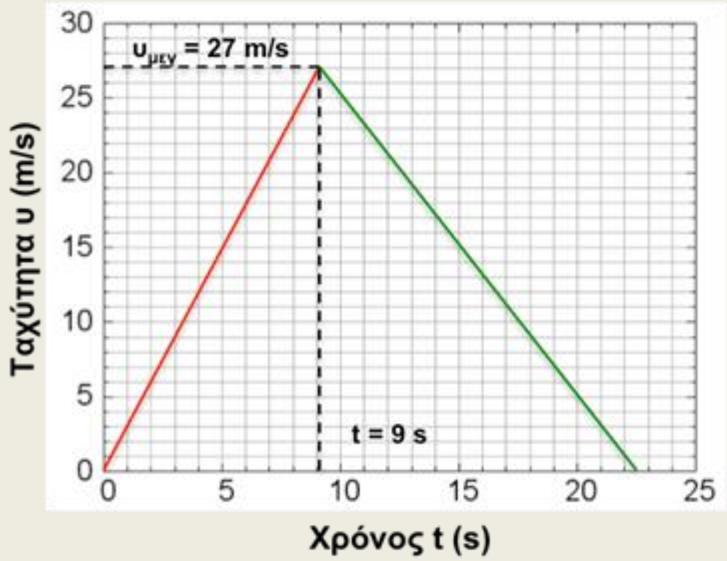
$$x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Στην περίπτωση που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η πιο πάνω σχέση αποκτά την μορφή:

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Παράδειγμα 1: Ενα αυτοκίνητο ξεκινά με μηδενική αρχική ταχύτητα και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $3\ \text{m/s}^2$ για $9\ \text{s}$. Ξαφνικά, ο οδηγός αντιλαμβάνεται μια χελώνα στη μέση του δρόμου και πατά απότομα το φρένο. Έπειτα, το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $-2\ \text{m/s}^2$ μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

Α. Να κάνετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου του αυτοκινήτου. Από τη γραφική παράσταση να συμπεράνετε πόσο διάρκεσε η κίνηση του αυτοκινήτου.



Εικόνα 2- 27: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου του αυτοκινήτου.

Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στα πρώτα 9 s η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $+3\ \text{m/s}^2$. Η γραφική παράσταση στο διάστημα $0\ \text{s} - 9\ \text{s}$ είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(t = 0\ \text{s},\ \upsilon = 0\ \text{m/s})$, με κλίση $+3\ \text{m/s}^2$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-27. Τη χρονική στιγμή $t = 9\ \text{s}$, η ευθεία έχει τεταγμένη $3\ \text{m/s}^2 \times 9\ \text{s} = 27\ \text{m/s}$.

Για χρόνο $t > 9$ s, η γραφική παράσταση είναι ευθεία με κλίση -2 m/s^2. Χαράσσουμε αυτή την ευθεία μέχρι το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η τεταγμένη της. Η τετμημένη της ευθείας σε εκείνο το σημείο ισούται με τη χρονική στιγμή στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου.

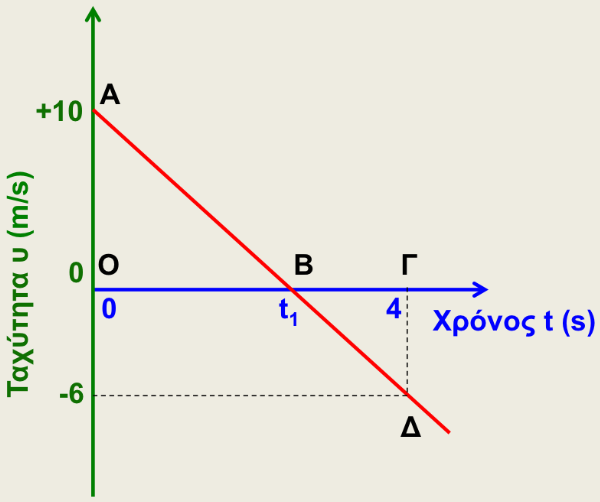
Β. Από τη γραφική παράσταση, να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου.

Η συνολική μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου και τον άξονα χρόνου:

$$\Delta x = E = \frac{1}{2}\upsilon_{max}\,\Delta t = \frac{1}{2}27 \times 22{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\text{s} = 304\ \text{m}.$$

Παράδειγμα 2: Κίνηση με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και αντιστροφή φοράς της ταχύτητας.

Στην Εικόνα 2-28 φαίνεται η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου ενός φορτισμένου σταγονιδίου μελάνης εκτυπωτή, που κινείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και τη στιγμή $t = 0$ s έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = +10$ m/s. Το σταγονίδιο κινείται συνεχώς ευθύγραμμα.



Εικόνα 2-28: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για σώμα που κινείται με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και αντιστρέφει τη φορά της ταχύτητας.

Α. Χρησιμοποιώντας την Εικόνα 2-28, υπολογίστε την επιτάχυνση του σωματιδίου.

Επειδή η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου είναι ευθεία με αρνητική κλίση, η επιτάχυνση είναι σταθερή και αρνητική. Η τιμή της επιτάχυνσης ισούται με την κλίση της ευθείας:

$$\alpha = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{-6-(+10)}{4}\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = -4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Β. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης ταχύτητας – χρόνου της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή t_1, στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητα του σταγονιδίου.

Η σχέση ταχύτητας – χρόνου είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$$

όπου $t_0 = 0$ s και $\upsilon_0 = +10$ m/s. Μηδενίζοντας την ταχύτητα, βρίσκουμε:

$$\upsilon_0 + \alpha(t_1 - t_0) = 0 \Rightarrow t_1 = t_0 - \frac{\upsilon_0}{\alpha} = 0\text{ s} - \frac{10\text{ m/s}}{-4\text{ m/s}^2} = 2{,}5\text{ s}$$

Γ. Να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου.

Το σταγονίδιο κινείται πάνω σε μια ευθεία γραμμή και η θέση του μετράται από κάποιο αυθαίρετο σημείο αναφοράς. Η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι θετική, δηλαδή το σωματίδιο κινείται αρχικά προς την κατεύθυνση στην οποία αυξάνονται οι τιμές των θέσεων. Η ταχύτητα του σταγονιδίου ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό και μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 2{,}5$ s. Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή το πρόσημο της ταχύτητας είναι αρνητικό και το μέτρο της αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Συνεπώς, το σωματίδιο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, κατά την οποία μειώνονται οι τιμές των θέσεων.

Δ. Χρησιμοποιώντας το γράφημα, να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του σωματιδίου.

Θα χωρίσουμε την κίνηση στα δύο τμήματα με $t < 2{,}5$ s και $t > 2{,}5$ s. Η μετατόπιση σε κάθε τμήμα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας – χρόνου και τον οριζόντιο άξονα.

(1) Τμήμα $t < 2{,}5$ s: Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ισούται με:

$$E_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} 2{,}5(+10)\text{s}\frac{\text{m}}{\text{s}} = +12{,}5\text{m}$$

(2) Τμήμα $t > 2{,}5$ s: Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ ισούται με:

$$E_2 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}(4 - 2{,}5)(-6)\text{s}\frac{\text{m}}{\text{s}} = -4{,}5\text{m}$$

Σημείωση: Τα εμβαδά αυτά έχουν μονάδες μήκους όπως θα έπρεπε, επειδή εκφράζουν μετατοπίσεις.

Παρατηρούμε ότι στον υπολογισμό των εμβαδών χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ θεωρείται αρνητικό, επειδή η επιφάνειά του είναι κάτω από τον οριζόντιο άξονα (η ταχύτητα είναι αρνητική). Η αρνητική μετατόπιση εκφράζει το γεγονός ότι το σωματίδιο έχει αλλάξει φορά κίνησης σε αυτό το τμήμα.

Η συνολική μετατόπιση ισούται με το άθροισμα των μετατοπίσεων στα δύο τμήματα της κίνησης:

$$\Delta x = 12{,}5\ \text{m} + (-4{,}5\ \text{m}) = +8\ \text{m}$$

Ε. Να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση από την κινηματική εξίσωση θέσης – χρόνου.

Η εξίσωση κίνησης θέσης – χρόνου είναι:

$$\Delta x = x - x_0 = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$

Αντικαθιστώντας τη συνολική χρονική διάρκεια $t - t_0 = 4\ \text{s}$, βρίσκουμε όπως και στο ερώτημα **Δ**:

$$\Delta x = 10 \times 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\text{s} + \frac{1}{2}(-4) \times 4^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{s}^2 = +8\ \text{m}$$

Σχέση Ταχύτητας – Μετατόπισης

Από τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης μπορούμε να καταλήξουμε σε μια πολύ χρήσιμη σχέση, που συνδέει την μετατόπιση ενός σώματος με την αρχική και τελική ταχύτητά του.

Η μετατόπιση σε ένα χρονικό διάστημα Δt συνδέεται με την αντίστοιχη μέση ταχύτητα με τη σχέση:

$$\Delta x = \upsilon_\mu \Delta t$$

Η μέση ταχύτητα (για σταθερή επιτάχυνση) είναι:

$$\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$$

όπου $\upsilon_{\alpha\rho\chi}$ και $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι, αντίστοιχα, η αρχική και τελική ταχύτητα κατά τη διάρκεια της μετατόπισης Δx.

Από την σχέση ταχύτητας – χρόνου, προκύπτει για τη χρονική διάρκεια:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \alpha\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\alpha}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις, καταλήγουμε στην εξής σχέση μετατόπισης – ταχύτητας:

$$\Delta x = \upsilon_{\mu}\,\Delta t = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} + \upsilon_{\alpha\rho\chi}}{2}\,\frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\alpha} = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha\,\Delta x$$

Στη σχέση αυτή εμφανίζονται η αρχική και τελική ταχύτητα και η μετατόπιση αλλά *έχει απαλειφθεί το χρονικό διάστημα της κίνησης*. Από τη μετατόπιση και την αρχική ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα χωρίς να γνωρίζουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης. Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε την αρχική και τελική ταχύτητα και τη μετατόπιση, μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2}{2\,\Delta x}$$

Παράδειγμα: Ο διάδρομος απογείωσης σε ένα τυπικό σύγχρονο αεροπλανοφόρο έχει μήκος 100 m. Αν το αεροπλάνο τη στιγμή της απογείωσης χρειάζεται να έχει αναπτύξει ταχύτητα 288 km/h, υπολογίστε την επιτάχυνση κατά τη διάρκεια της απογείωσης. Υποθέστε ότι η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και ότι το πλοίο είναι ακίνητο. Ποιά είναι η χρονική διάρκεια της απογείωσης;

(Πηγή: www.english-online.at/ technology/aircraft-carrier/aircraft-carrier.h)

Αφού το πλοίο είναι ακίνητο, η αρχική ταχύτητα του αεροπλάνου είναι ίση με 0 m/s. Γνωρίζουμε ότι μετά από μετατόπιση 100 m το αεροπλάνο αποκτά ταχύτητα 288 km/h. Μπορούμε να λύσουμε την σχέση ταχύτητας – μετατόπισης ως προς την επιτάχυνση και να αντικαταστήσουμε τα δεδομένα. Γι αυτό το σκοπό χρειάζεται να μετατρέψουμε την τελική ταχύτητα σε μονάδες SI:

$$\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 288\frac{\text{km}}{\text{h}} = 288\frac{\text{km}}{\text{h}}\frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}}\frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 80\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση ταχύτητας – μετατόπισης, βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2}{2\,\Delta x} = \frac{80^2 - 0^2}{2 \times 100}\frac{(\text{m/s})^2}{\text{m}} = 32\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Το αεροπλάνο κινείται με επιτάχυνση $32\ \text{m/s}^2$, που είναι περίπου $3{,}3$ φορές μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας $(9{,}81\,\text{m/s}^2)$. Για να αποκτήσουν τέτοιες επιταχύνσεις τα αεροπλάνα ωθούνται από ειδικούς καταπέλτες, εγκατεστημένους στο διάδρομο απογείωσης του αεροπλανοφόρου.

Η μέση ταχύτητα του αεροπλάνου είναι $(0+80)\,/\,2\ \text{m/s} = 40\ \text{m/s}.$ Η χρονική διάρκεια της απογείωσης προσδιορίζεται εύκολα από τη μετατόπιση και τη μέση ταχύτητα:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon_\mu} = \frac{100}{40}\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 2{,}5\ \text{s}$$

Ελεύθερη Πτώση: Ένα Παράδειγμα Ομαλά Επιταχυνόμενης Κίνησης

Το 1602, ο Γαλιλαίος μελέτησε την πτώση σωμάτων από σχετικά χαμηλό ύψος από την επιφάνεια της Γης. Διαπίστωσε ότι στις περιπτώσεις που η αντίσταση του αέρα μπορούσε να αγνοηθεί, τα σώματα έπεφταν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση, ανεξάρτητα από το βάρος τους. Γενικά, η κίνηση ενός σώματος υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης της Γης ονομάζεται **ελεύθερη πτώση**.

Η επιτάχυνση ενός σώματος, που πέφτει ελεύθερα, έχει κατακόρυφη διεύθυνση (τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το σώμα με το κέντρο της Γής), φορά προς το κέντρο της Γης, και ονομάζεται **επιτάχυνση της βαρύτητας** (**g**).

Ακριβείς μετρήσεις δείχνουν ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου και ελαττώνεται από τους πόλους $(9{,}83\ \text{m/s}^2)$ προς τον Ισημερινό $(9{,}78\ \text{m/s}^2)$. Στα προβλήματα που θα μελετήσουμε, θεωρούμε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι σταθερό και το θέτουμε ίσο με $9{,}81\,\text{m/s}^2$.

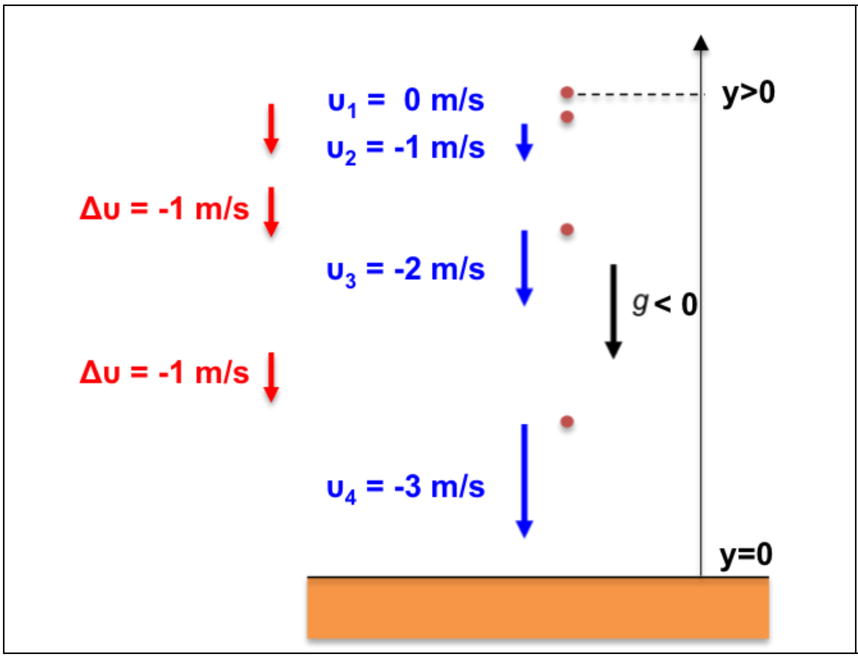
Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που το σώμα αφήνεται ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα, ή του προσδίδεται αρχική ταχύτητα με κατακόρυφη διεύθυνση. Σε αυτές τις περιπτώσεις το σώμα κινείται συνεχώς σε κατακόρυφη διεύθυνση με σταθερή επιτάχυνση g.

Επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, περιγράφεται από τις εξισώσεις που αποδείξαμε προηγουμένως

$$y = y_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \; s$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + g(t - t_0)$$

Η μεταβλητή y στην εξίσωση θέσης – χρόνου δηλώνει την θέση πάνω στην ευθεία κίνησης, όπως υπολογίζεται από κάποιο σημείο αναφοράς. Συνηθισμένη σύμβαση είναι να επιλέξουμε το σημείο αναφοράς στην επιφάνεια της Γής και *να θεωρήσουμε ως θετική την κατεύθυνση προς τα επάνω* (Εικόνα 2-29). Στη σύμβαση αυτή, *οι θέσεις έχουν θετικές τιμές, οι ταχύτητες με κατεύθυνση προς τα επάνω είναι θετικές και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι αρνητική,* $g = -9{,}81\,\text{m/s}^2$. Η μεταβλητή y είναι το ύψος από το έδαφος.



Εικόνα 2-29: Ελεύθερη πτώση ενός σώματος που ξεκινά με μηδενική ταχύτητα από κάποιο αρχικό ύψος. Στο σχήμα απεικονίζεται η θέση του σώματος μετά από διαδοχικά, ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα. Οι τιμές της θέσης υπολογίζονται από το έδαφος, με θετικό πρόσημο προς τα επάνω. Η μετατόπιση, η ταχύτητα, η μεταβολή της ταχύτητας και η επιτάχυνση έχουν αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα: Ένα σώμα αφήνεται με μηδενική ταχύτητα από την οροφή του υψηλότερου ουρανοξύστη στον κόσμο (στο Ντουμπάι), σε ύψος $828{,}0\ \text{m}$ από το έδαφος. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία προσκρούει στο έδαφος και η χρονική διάρκεια της πτώσης. Αμελούμε την αντίσταση του αέρα.

Για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια μέχρι να φτάσει στο έδαφος, θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση κίνησης, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η ταχύτητα υ_0 είναι ίση με μηδέν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

$$y_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g\ (t - t_0)^2 = y \Rightarrow y_0 + \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2y_0}{(-g)}} = \sqrt{\frac{2 \times 828{,}0}{9{,}81} \frac{\text{m}}{\text{m/s}^2}} = \sqrt{168{,}81\text{s}^2} = 13{,}0\ \text{s}$$

Η ταχύτητα πρόσκρουσης υπολογίζεται αν χρησιμοποιήσουμε το χρόνο καθόδου στη σχέση ταχύτητας – χρόνου:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g\, t_{\kappa\alpha\theta} = g\, t_{\kappa\alpha\theta} = -9{,}81 \times 13{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{s} = -128\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ταχύτητα αυτή είναι τεράστια (υπολογίστε την σε km/h). Στην πραγματικότητα, ένα σώμα που πέφτει από τέτοιο ύψος υφίσταται αρκετά μεγάλη επίδραση από την αντίσταση του αέρα καθώς μεγαλώνει η ταχύτητά του, οπότε στην πραγματικότητα δεν εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εξετάσουμε σε τι αποτέλεσμα θα οδηγούσε η εφαρμογή της εναλλακτικής σύμβασης, στην οποία το σημείο αναφοράς επιλέγεται στην αρχική θέση και η θετική κατεύθυνση επιλέγεται προς τα κάτω. Με αυτή τη σύμβαση, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης g είναι θετική, η αρχική θέση $y_0 = 0$, και η θέση του σώματος όταν φθάνει στο έδαφος είναι ίση με το ύψος του ουρανοξύστη h.

Για να βρούμε το χρόνο κίνησης θέτουμε $y = h$ στην εξίσωση κίνησης, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $y_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$:

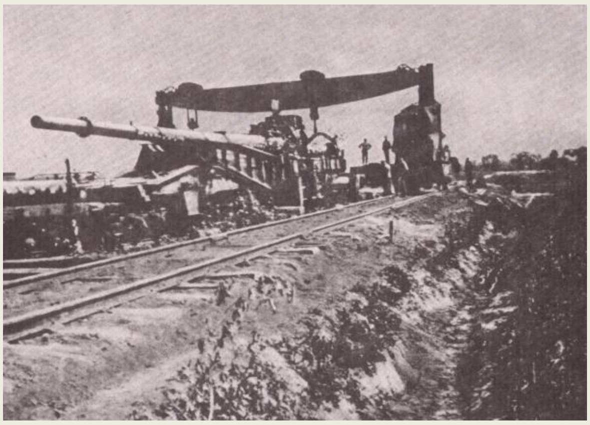
$$y_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g\ (t - t_0)^2 = y \Rightarrow + \frac{1}{2} g\, t_{\kappa\alpha\theta}^2 = h \Rightarrow t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 13{,}0\ \text{s}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως. Τι πρόσημο θα έχει η τελική ταχύτητα;

Κατακόρυφη Βολή

Ακολούθως μελετούμε παράδειγμα κατακόρυφης βολής στο οποίο το σώμα έχει μη μηδενική αρχική ταχύτητα προς τα επάνω.

Παράδειγμα: Το «κανόνι του Παρισιού» χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο. Είχε τη δυνατότητα να εκτοξεύει βλήματα βάρους 106 kg, τα οποία είχαν αρχική ταχύτητα 1 640 m/s και μπορούσαν να πλήξουν στόχους ακόμα και σε απόσταση 130 km.



Ας θεωρήσουμε ότι ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω από το επίπεδο του εδάφους ($y=0$) με ταχύτητα 1 000,0 m/s.

Α. Να περιγράψετε την κίνηση θεωρώντας ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Το βλήμα ξεκινά με θετική αρχική ταχύτητα, που ελαττώνεται συνεχώς λόγω της έλξης της βαρύτητας. Μετά από χρονικό διάστημα ίσο με το χρόνο ανόδου, το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος, όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται. Στη συνέχεια, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με αρνητική ταχύτητα, που μεγαλώνει ως προς το μέτρο. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης η επιτάχυνση είναι σταθερή και αρνητική (ίση με g).

Β. Να υπολογίσετε το χρόνο ανόδου.

Η άνοδος τερματίζεται όταν μηδενιστεί η ταχύτητα του βλήματος. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το χρόνο ανόδου μηδενίζουμε την ταχύτητα στην εξίσωση ταχύτητας – χρόνου.

$$\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_0 + g t_{\alpha\nu} = 0 \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0}{-g} = \frac{1\,000{,}0}{9{,}81}\,\frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = 102\ \text{s}$$

Γ. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος, το χρόνο καθόδου και την ταχύτητα με την οποία το βλήμα επιστρέφει στο έδαφος.

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος θέτουμε $t - t_0 = t_{\alpha\nu}$ στην εξίσωση θέσης – χρόνου.

$$y - y_0 = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_0 t_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g t_{\alpha\nu}^2$$

Αντικαθιστώντας το χρόνο ανόδου από το ερώτημα Β, καταλήγουμε στη σχέση:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{-g} + \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0}{-g} \right)^2 = \frac{\upsilon_0^2}{-g} + \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2}{2(-g)}$$

Παρατηρούμε ότι *είναι προτιμότερο να καταλήγουμε σε μια τελική σχέση στην οποία έχουμε κάνει όλες τις δυνατές απαλοιφές μεγεθών, και κατόπιν να εισάγουμε τα δεδομένα του προβλήματος*. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε επιπρόσθετες πράξεις και εξάγουμε απλούστερες σχέσεις, που οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Από την τελική σχέση του ερωτήματος **Γ** προκύπτει ότι για τον υπολογισμό του μέγιστου ύψους δεν χρειάζεται να είναι γνωστός ο χρόνος ανόδου. Στην περίπτωσή μας:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2(-g)} = \frac{1\,000^2}{2 \times 9{,}81} \frac{(\text{m/s})^2}{\text{m/s}^2} = 50\,968 \text{ m} \cong 51{,}0 \text{ km}$$

Στην πραγματικότητα, τα βλήματα του κανονιού εκτοξεύονταν πλάγια (για να μετακινούνται και στην οριζόντια διεύθυνση), και έφταναν στη στρατόσφαιρα, σε μέγιστο ύψος $42\ \text{km}$. Σε αυτό το ύψος η ατμόσφαιρα είναι πολύ αραιή και η αντίσταση του αέρα μικρή, διευκολύνοντας την κάλυψη μεγάλων αποστάσεων.

Κατά την κάθοδό του, το βλήμα ξεκινά από το μέγιστο ύψος $y_{\mu\varepsilon\gamma}$ με αρχική ταχύτητα μηδέν και σταματά όταν μηδενιστεί το ύψος, αφού προσκρούσει στο έδαφος. Συνεπώς, ισχύει η σχέση που εξάγαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

$$t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2y_{\mu\varepsilon\gamma}}{-g}} = \sqrt{\frac{2 \times 50\,968}{9{,}81} \frac{\text{m}}{\text{m/s}}} = 102\,s$$

Ο χρόνος καθόδου που υπολογίσαμε ισούται με το χρόνο ανόδου. *Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι τυχαίο, αλλά ισχύει για κάθε αρχική ταχύτητα* (όταν η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα). Για να το αποδείξουμε, απαλείφουμε το μέγιστο ύψος από τη σχέση του χρόνου καθόδου:

$$t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2y_{\mu\varepsilon\gamma}}{-g}} = \sqrt{\frac{2\upsilon_0^2}{2(-g)^2}} = \frac{|\upsilon_0|}{|g|} = \frac{\upsilon_0}{-g} = t_{\alpha\nu}$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, ο συνολικός χρόνος κίνησης του βλήματος μπορεί να υπολογισθεί αν απαιτήσουμε η απομάκρυνση από το έδαφος να γίνει ίση με μηδέν. Το αρχικό ύψος $y_0 = 0$. Θέτοντας $y = y_0 = 0$ στην εξίσωση της κίνησης:

$$y - y_0 = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 t_{o\lambda} + \frac{1}{2} g t_{o\lambda}^2 \Rightarrow$$

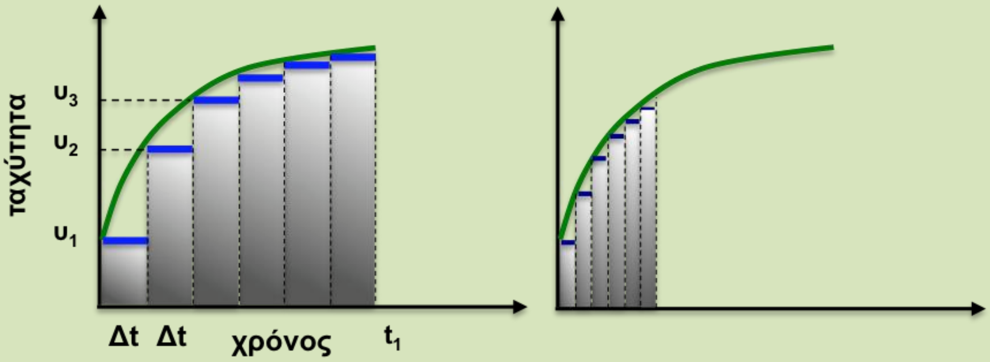
$$\Rightarrow t_{o\lambda} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2\upsilon_0}{-g} \end{cases}$$

Η (τετριμμένη) ρίζα $t_{o\lambda} = 0$ αντιστοιχεί στην αρχική στιγμή, κατά την οποία το βλήμα εκτοξεύεται. Η δεύτερη ρίζα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή κατά την οποία το βλήμα επιστρέφει στο έδαφος. Συνδυάζοντας με το αποτέλεσμα του ερωτήματος Β για τον χρόνο ανόδου, $t_{\alpha\nu} = \dfrac{\upsilon_0}{-g}$, προκύπτει ότι $t_{\kappa\alpha\theta} = \dfrac{\upsilon_0}{-g} = t_{\alpha\nu}$.

Άσκηση: Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του βλήματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

Ένθετο: Σύνδεση Εμβαδού Γραφικής Παράστασης Ταχύτητας – Χρόνου και Μετατόπισης στη Γενικότερη Περίπτωση Κίνησης με Μεταβαλλόμενη Επιτάχυνση

Στα προηγούμενα αναφέραμε ότι το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου της κίνησης με σταθερή ταχύτητα, ή σταθερή επιτάχυνση, ισούται με τη συνολική μετατόπιση του σώματος. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει γενικότερα για οποιαδήποτε κίνηση. Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου, της Εικόνας 2-30, που περιγράφει μια γενική κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.



Εικόνα 2-30: Γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για κίνηση με μεταβλητή ταχύτητα. Καθώς η διάρκεια της κίνησης χωρίζεται σε συνεχώς μικρότερα διαστήματα Δt, το εμβαδόν των ορθογωνίων προσεγγίζει όλο και περισσότερο το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη. Ταυτόχρονα, η συνολική μετατόπιση που εκφράζεται από τα ορθογώνια προσεγγίζει την πραγματική μετατόπιση.

Η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι αρχικά ίση με υ_1 και αυξάνεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου.

Ας χωρίσουμε τη συνολική διάρκεια της κίνησης σε ίσα χρονικά διαστήματα Δt, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα. Αν τα διαστήματα δεν είναι πολύ μικρά, η ταχύτητα του αυτοκινήτου μέσα σε κάθε διάστημα δεν θα είναι σταθερή. Ας υποθέσουμε όμως ότι στο πρώτο διάστημα το αυτοκίνητο δεν κινείται με την πραγματική του ταχύτητα, αλλά διατηρεί συνεχώς την ταχύτητα υ_1 που είχε στην αρχή του διαστήματος. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου είναι το πρώτο οριζόντιο μπλε ευθύγραμμο τμήμα. Η μετατόπιση που αντιστοιχεί σε αυτή την ταχύτητα ισούται με το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου, $\upsilon_1 \Delta t$.

Επαναλαμβάνουμε αυτή την προσέγγιση και για τα υπόλοιπα διαστήματα: Στο δεύτερο διάστημα υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο διατηρεί συνεχώς την ταχύτητα υ_2 που είχε στην αρχή του δεύτερου διαστήματος. Η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου είναι το δεύτερο μπλε ευθύγραμμο τμήμα και η μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου, $\upsilon_2 \Delta t$. Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι *η συνολική μετατόπιση ενός αυτοκινήτου, που κινείται με τις ταχύτητες $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots$ των μπλε ορθογωνίων τμημάτων, ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.*

Η πραγματική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι σχεδόν συνεχώς μεγαλύτερη από τις σταθερές ταχύτητες $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots$ (η πράσινη καμπύλη είναι πάνω από τα οριζόντια, μπλε ευθύγραμμα τμήματα). Συνεπώς, η *πραγματική συνολική μετατόπιση* είναι πιο μεγάλη από το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Για να προσεγγίσουμε καλύτερα τη συνολική μετατόπιση, χωρίζουμε τη χρονική διάρκεια σε περισσότερα και μικρότερα διαστήματα, όπως φαίνεται στο δεξιό σχήμα της εικόνας.

Όταν η διάρκεια ενός διαστήματος είναι μικρότερη, η ταχύτητα στην αρχή του διαστήματος προσεγγίζει περισσότερο από πριν την ταχύτητα σε όλο το διάστημα, και το αντίστοιχο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα προσεγγίζει περισσότερο την πράσινη καμπύλη. Δεδομένου ότι οι σταθερές ταχύτητες προσεγγίζουν περισσότερο τις πραγματικές ταχύτητες, το άθροισμα των μετατοπίσεών τους (το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων) γίνεται περίπου ίσο με την πραγματική μετατόπιση. Ταυτόχρονα, το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων γίνεται περίπου ίσο με το συνολικό εμβαδόν κάτω από την πράσινη καμπύλη. Στο όριο που η διάρκεια Δt των διαστημάτων γίνει περίπου ίση με μηδέν, οι ταχύτητες των διαστημάτων ταυτίζονται με τις στιγμιαίες ταχύτητες και το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων γίνεται ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.

Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι *η πραγματική συνολική μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη ταχύτητας – χρόνου και τον άξονα του χρόνου.*

Εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

Εξίσωση θέσης – χρόνου

$$x = x_0 + \upsilon\,(t - t_0)$$

Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $x_0 = 0$, η εξίσωση απλοποιείται:

$$x = \upsilon t$$

Εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

Εξίσωση θέσης – χρόνου

$$x = x_0 + \upsilon_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$

Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = 0$, η εξίσωση απλοποιείται:

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Εξίσωση ταχύτητας – χρόνου

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\left(t - t_0\right)$$

Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $\upsilon_0 = 0$, η εξίσωση απλοποιείται:

$$\upsilon = \alpha t$$

Μέση ταχύτητα

$$\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$$

Σχέση ταχύτητας – μετατόπισης

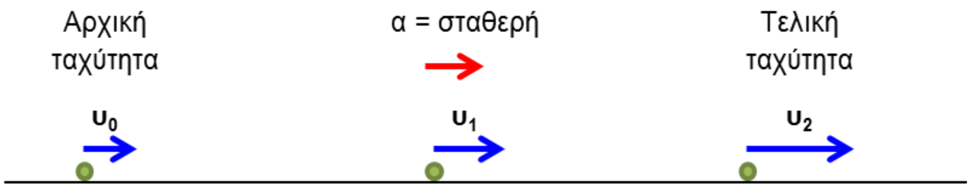
$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha\Delta x$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Ερώτηση	Σωστό/Λάθος
Όταν η επιτάχυνση είναι θετική το μέτρο της ταχύτητας πάντα αυξάνεται	
Όταν η επιτάχυνση είναι αρνητική το μέτρο της ταχύτητας πάντα ελαττώνεται	
Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η στιγμιαία επιτάχυνση αλλάζει με το χρόνο	
Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η μέση επιτάχυνση δεν αλλάζει με το χρόνο	
Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η μετατόπιση είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα.	
Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η μεταβολή στην ταχύτητα είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα.	
Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, αν διπλασιαστεί το χρονικό διάστημα πάντα τετραπλασιάζεται η μετατόπιση.	
Σε μια κατακόρυφη βολή, η φορά της επιτάχυνσης δεν εξαρτάται από τη φορά της κίνησης	
Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς ενός σώματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με μηδέν	

Ασκήσεις

1. Ένα σώμα κινείται προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο κάτω διάγραμμα κίνησης, και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Στο διάγραμμα κίνησης σημειώνονται τα διανύσματα της ταχύτητας του σώματος σε τρεις διαφορετικές θέσεις.



Να σχεδιάσετε τα ανάλογα διαγράμματα κίνησης, συμπεριλαμβάνοντας τα βέλη ταχύτητας και επιτάχυνσης, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α. Το σώμα κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα.

Β. Το σώμα κινείται προς τα δεξιά και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

Γ. Το σώμα κινείται προς τα αριστερά και το μέτρο της ταχύτητας του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

Δ. Το σώμα κινείται προς τα αριστερά και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

2. Ένα αυτοκινητάκι κινείται με σταθερή επιτάχυνση και έχει ταχύτητα $12\ \text{cm/s}$ όταν περνά από τη θέση $3\ \text{cm}$. Δύο δευτερόλεπτα αργότερα το αυτοκινητάκι περνά από τη θέση $25\ \text{cm}$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.

3. Κατά την προσγείωση ενός αεροπλάνου, το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με $100\ \text{m/s}$, την ώρα που αγγίζει το διάδρομο. Κατά τη διάρκεια της κίνησής του στον διάδρομο προσγείωσης, η ταχύτητα ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό ίσο με $5\ \text{m/s}$.

Α. Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο, από τη στιγμή που αγγίζει τον διάδρομο.

Β. Να διερευνήσετε κατά πόσο είναι ασφαλής η προσγείωση του αεροπλάνου στο αεροδρόμιο ενός μικρού νησιού, του οποίου ο αεροδιάδρομος έχει μήκος $800\ \text{m}$.

4. Σε έναν αγώνα Formula 1, ένα αυτοκίνητο ξεκινά από ηρεμία και αποκτά ταχύτητα $300\ \text{km/h}$ σε $8{,}6\ \text{s}$.

Α. Να υπολογίσετε την μέση επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

Β. Θεωρώντας ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, να υπολογίσετε το μέτρο της μετατόπισης του αυτοκινήτου.

Γ. Γιατί οι πίστες αγώνων F1 έχουν ευθύγραμμα τμήματα με μήκος πολλών χιλιομέτρων;

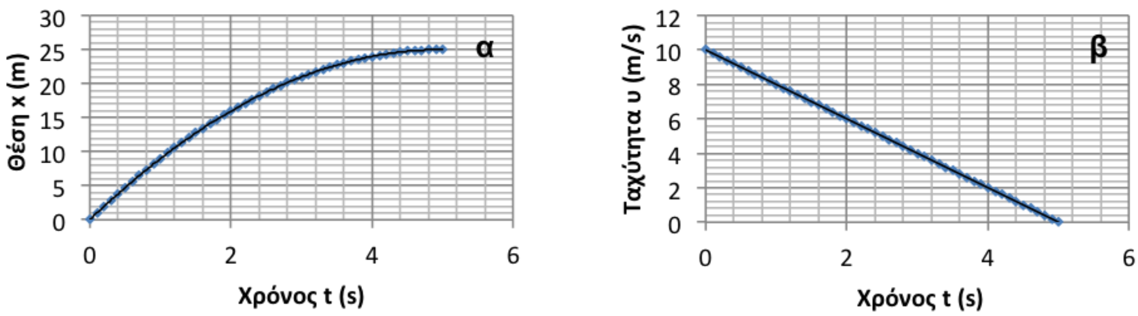
5. Ένας καλαθοσφαιριστής ρίχνει κατακόρυφα και προς τα πάνω μια μπάλα του μπάσκετ. Η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του αθλητή σε ύψος $3\,\text{m}$ από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα μέτρου $5\ \text{m/s}$. Επιλέγοντας σαν σημείο αναφοράς το σημείο από το οποίο η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του αθλητή και θετική τη φορά προς τα επάνω, να υπολογίσετε:

Α. τη χρονική διάρκεια της κίνησης της μπάλας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.
Β. την ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος.
Γ. το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα.

6. Στο λυμένο παράδειγμα με το κανόνι του Παρισιού να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του βλήματος για τη διάρκεια της κίνησης· και να την συγκρίνετε με την αρχική ταχύτητα.

7. Ένας οδηγός πλησιάζει στα φώτα τροχαίας. Τη χρονική στιγμή $t=0$ πατά το φρένο και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα. Η θέση του οδηγού έχει τιμή $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$, και αυξάνεται κατά τη φορά της κίνησης.

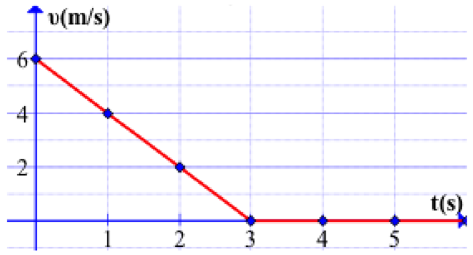
Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της θέσης (x) και της ταχύτητας (υ) του αυτοκινήτου σε σχέση με τον χρόνο (t), από τη στιγμή που ο οδηγός πατά το φρένο μέχρι τη στιγμή που το αυτοκίνητο ακινητοποιείται.



Γραφικές παραστάσεις (α) θέσης – χρόνου και (β) ταχύτητας – χρόνου για αυτοκίνητο που πλησιάζει σε κόκκινο φανάρι τροχαίας.

Α. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις, να εξετάσετε αν το αυτοκίνητο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
Β. Να χρησιμοποιήσετε όποια γραφική παράσταση θεωρείτε κατάλληλη για να υπολογίσετε την μέση ταχύτητα και την επιτάχυνση του αυτοκινήτου. Ποιό είναι το πρόσημο της επιτάχυνσης;

8. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου ενός σώματος. Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:



Α. Να περιγράψετε την κίνηση.

Β. Να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση στο διάστημα $0\ \text{s} - 5\ \text{s}$.

Γ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση στο διάστημα $0\ \text{s} - 3\ \text{s}$.

Δ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση για το διάστημα $1\ \text{s} - 2\ \text{s}$.

Ε. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα.

9. Ένα οχηματαγωγό πλοίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\ \text{s}$ σε απόσταση $500\ \text{m}$ από ένα λιμάνι, και πλησιάζει το λιμάνι με σταθερή ταχύτητα $5\ \text{m/s}$. Για να ελαττώσει την ταχύτητά του πλοίου, σε κάποια στιγμή t_1 ο καπετάνιος αναστρέφει την κίνηση της προπέλας. Η αναστροφή κάνει το πλοίο να κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $0{,}5\ \text{m/s}^2$, έτσι ώστε όταν φτάσει την προκυμαία τη χρονική στιγμή t_2, το πλοίο να έχει ταχύτητα ακριβώς ίση με $0\ \text{m/s}$.

Α. Κάνετε σχηματική γραφική παράσταση της σχέσης ταχύτητας – χρόνου για το πλοίο, χρησιμοποιώντας την πληροφορία για την αρχική ταχύτητα και για την επιτάχυνση στο τελευταίο τμήμα της διαδρομής.

Β. Από την γραφική παράσταση της ταχύτητας – χρόνου και τις κινηματικές εξισώσεις, υπολογίστε σε ποιά χρονική στιγμή πρέπει να αναστρέψει την κίνηση της προπέλας ο καπετάνιος για να προσεγγίσει με μηδενική ταχύτητα στην προκυμαία.

Σημείωση: Οι Εικόνες και οι φιγούρες των Εικόνων έχουν γίνει από τους συγγραφείς. Για κάποιες από τις φιγούρες που χρησιμοποιούνται σε Εικόνες των Κεφαλαίων 1 και 2, αποτέλεσε πηγή έμπνευσης ο ιστότοπος Freepik.com.